



מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

משולש סירפינסקי

פרקטלים

וסדרות הנדסיות מתכנסות ומתבדרות

צוות מועדון ה-5



מרכז ארצי
למורים למתמטיקה
בחינוך העל יסודי

المركز القطري للمعلمي الرياضيات في
المرحلتين الاعدادية والثانوية



אוניברסיטת חיפה
University of Haifa
جامعة حيفا

חמ"ה
מרכז אינטר-דיסציפלינארי
חקר, חינוך, מחוננות והצטיינות



מבוא

- הסדנה מיועדת למורים המלמדים ברמה של 5 יח"ל במטרה לפתח ידע מורים.
- פעילות זאת יכולה להשתלב בהוראה בכיתה למטרות הבאות:
 - להציג את התרבות של המתמטיקה וההנאה מיופיה.
 - קישוריות של נושאים מתוכנית הלימודים ומעבר לה.
 - מתמטיקה כיצירה (Recreational mathematics)
 - פעילות משותפת לכל הכיתה ולכל הרמות
 - יצירת אווירה מתמטית בכיתה וקישוטה.
- הסדנה עוסקת בנושאים מתמטיים הבאים:
 - דמיון משולשים
 - רקורסיה
 - סדרה הנדסית וסכומה
 - התכנסות והתבדרות של סדרות
 - האינסוף
 - אינדוקציה
 - פתרון משוואה ואי שוויון לוגריתמי
 - העשרה : פרקטלים, מימד של צורה
- הסדנה משלבת דרכי הוראה שונים:
 - עבודה יחידנית, התנסות אישית – יצירה וחקר.
 - עבודה שיתופית בקבוצות קטנות
 - עבודה במליאה, הסבר פרונטלי.
- הסדנה מתאימה לעבודה בקהילה , בפרט כפעילות פתיחה.
 - חתירה לתוצר שיתופי

מהלך הסדנה (כ- 30 דקות)

1. הקניית הגדרות והכרות עם מושגים (במליאה) (5 דקות)
2. בניית משולש סירפינסקי על פי ההוראות (יחידני) (5 דקות)
3. הסקת מסקנות לפי השאלות בסעיפים א' – ט' (בזוגות) (10 דקות)
4. הדבקת המשולשים למשולש גדול יותר (5 דקות)
5. דיון על מושג "מימד" (במליאה) (5 דקות)

הנחיות

יצירת משולש סירפינסקי:

נתחיל בעבודה יחידנית. כל אחד בקבוצה יקבל משולש גזור, סרגל וצבע. על פי ההוראות ישרטט קווים על המשולש ויצבע, כך שיתקבל משולש סירפינסקי.

בקבוצה – כל תשעה משולשים יודבקו על בריסטול הגזור גם הוא כמשולש. בקבוצות גדולות יכינו כמה משולשים גדולים. במפגש כל הקהילות נחבר את כל המשולשים למשולש אחד גדול יותר... (כמתואר בתמונות מעלה)

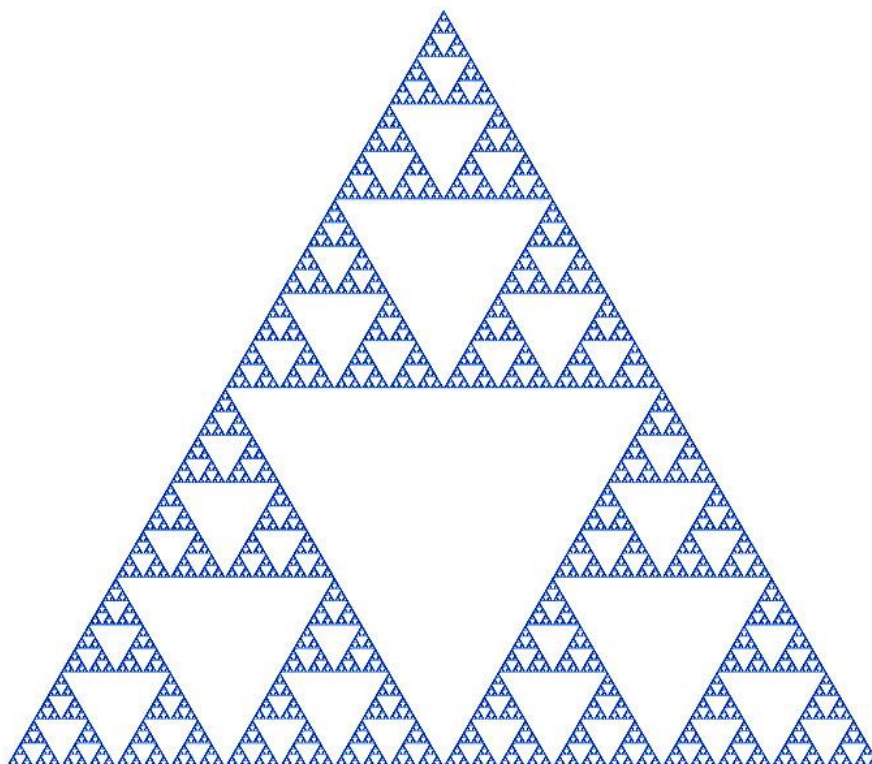
לחלופין – אפשר לוותר על צביעת המשולשים וליצור משולש סירפינסקי על ידי הרכבה של משולשים קטנים וצבעוניים.

מושג מימד של צורה חורג מתכני תוכנית הלימודים והוא מושג בסיסי בטופולוגיה. הדיון בו חשוב להעמקת הנושא ולהרחבת אופקים. את מידת העומק נצטרך להתאים ללוח הזמנים במפגש הראשון של הקהילות.

שטיח סירפינסקי

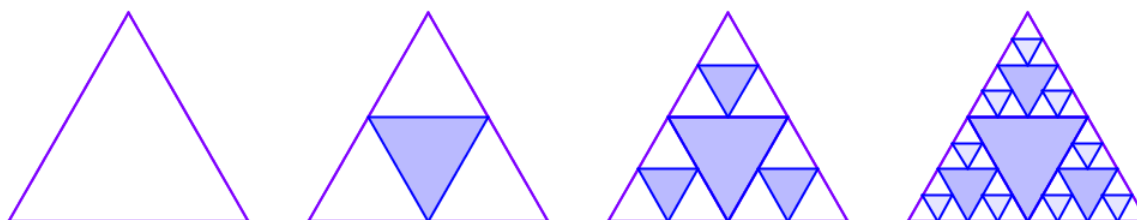
פרקטל הוא צורה גאומטרית שמורכבת מעותקים מוקטנים של עצמה בכל רמת פירוט שנסתכל בה. לא חשוב כמה נתבונן אל תוך חלקיו של הפרקטל, תמיד נמצא בו חלקים הדומים לצורתו המקורית, כך שפרט קטן בצורה, דומה לצורת המקור כולה. (ויקיפדיה)

אחד הפרקטלים המפורסמים והמעניינים נקרא על שם מתמטיקאי פולני וולך סירפינסקי (1917), "**שטיח סירפינסקי**", נקרא גם "**מסננת, ספוג סירפינסקי**" או "**משולש סירפינסקי**". הנה הוא לפניכם: התוכלו להסביר את מבנהו ?



כיצד בונים את השטיח?

מתחילים ממשולש שווה צלעות שאורך צלעו 1 יחידת אורך. בסדרה של צעדים חותכים ממנו משולשים דומים קטנים יותר ויותר. ראו [הדמיה אינטראקטיבית](#).



משימה 1

נבנה שטיח של משולש סירפינסקי

1. לפניכם משולש שווה צלעות, נסמן את שטחו S יחידת שטח.
 2. חברו את אמצעי צלעות המשולש כך שיתקבלו ארבעה משולשים קטנים יותר.
 3. "חיתכו" את המשולש המרכזי – לשם נוחות, צבעו אותו בצבע כהה יותר.
 4. בשלב האחרון קיבלתם שלושה משולשים לבנים (ואחד כהה "שהוצא").
- חזרו על השלבים 2-4 עבור כל אחד משלושת המשולשים.

הצטרפו לקבוצה וחברו את המשולש שיצרתם, עם המשולשים של חברי הקבוצה האחרים ובנו משולש סירפינסקי גדול יותר.

משימה 2

- א. הסבירו מדוע משולש סירפינסקי הוא פרקטל בעל תכונה של **דמיון עצמי** ?
- ב. מה המשמעות של ההוראה לחזור על ההוראות 2-4 ולא רק על ההוראות 2-3 ? האם ניתן ניתן לבצעה במלואה?

ג. השלימו את טבלת הנתונים.

אורך צלע המשולש 1 יחידת אורך ולכן שטחו $\frac{\sqrt{3}}{4}$ יח"ר. לשם נוחות נסמנו ב- S .

שלב	מספר המשולשים שנחתכו	מספר כולל של המשולשים	השטח של השטיח	ההיקף של השטיח
0	0	1	S	
1	1	3	$\frac{3}{4}S$	
2				
3				
4				
10				
n				

ד. כמה שטח ישאר מהשטיח בשלב ה-4 ? בשלב ה-5 ?

ה. באיזה שלב של החיתוך שטח ה"חורים" יהיה גדול משטח השטיח?

ו. באיזה שלב של חיתוך ישאר מהשטיח רק 1% מהשטח המקורי?

ז. מה תוכלו לומר על שטחו של שטיח ספירנסקי כאשר מספר החיתוכים שואף להיות אינסופי.

ח. מהו ההיקף של השטיח לאחר חיתוך אחד ? שימו לב להיקף גם סביב המשולש הקטן המרכזי שנחתך. השלימו בטבלה.

ט. מה תוכלו לומר על ההיקף של שטיח ספירנסקי כאשר מספר החיתוכים שואף להיות אינסופי.

י. תארו תכונות מיוחדות של משולש סירפינסקי?

משימה 3 - להרחבה:

מהו מימד של צורה? הייתכן מימד שבור?

כולנו יודעים מהו מימד – או לפחות נדמה לנו שאנו יודעים. בבית הספר, מסבירים בפשטות: נקודות הן בעלות מימד אפס, ישרים או עקומים הם חד-מימדיים, שטחים הינם דו-מימדיים וגופים הם תלת-מימדיים. אך מהו, בכל-זאת מימד? מהי הגדרתו המקובלת?

לאחר שהתחבטו בעניין מתמטיקאים רבים, בשנת 1919 המתמטיקאי הגרמני, ממיסדי הטופולוגיה, האוזדורף הציע לגשת להגדרת המימד, לפי השאלה הבאה: מה קורה לצורה כלשהי כאשר מגדילים את אורכי קטעיה פי גודל קבוע?

אפשר לשאול אם נגדיל את הצורה נקבל צורה דומה חדשה, כמה פעמים נכנסת הצורה המקורית בחדשה?

אם הגדלת אורך הצלע פי m גורמת להגדלת הגודל הכללי n פי m^D , אזי **מספר המימדים**

הוא D . **מספר המימדים** הוא איפוא המעריך (האקספוננט) בנוסחה המבטאת את הקשר בין הגדלת הצלע הגדלת הגודל הכללי.

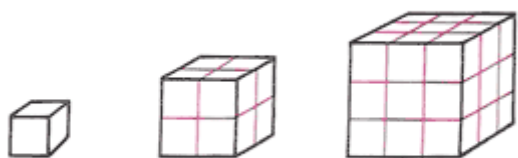
כלומר: מספר הצורות הדומות = m^D (גורם ההגדלה) $m^D = n$

נערך על פי המאמר – [טבעו המתמטי של הטבע](#), נחמן גבעולי, מחשבות 48. מומלץ לקריאה.

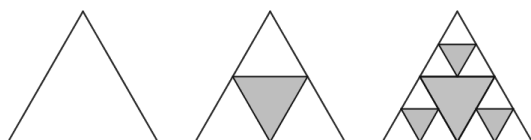
בחנו על פי הגדרה זו:



1. מהו מימד של שטח הריבוע? היעזרו באיור.



2. מהו מימד של קובייה? היעזרו באיור.



3. מהו מימד של משולש סירפינסקי?

הצעה לפתרונות

משימה 2

א. הסבירו מדוע משולש סירפינסקי הוא פרקטל בעל תכונה של **דמיון עצמי** ?

תשובה אפשרית:

משולש סרפינסקי נוצר בסדרה אינסופית של משולשים הדומים לעצמם בכל רמת פירוט שנסתכל בה. לתכונה זו קוראים, "דמיון עצמי", כלומר כל חלק של הפרקטל נראה כמו השלם, החלק של החלק נראה כמו החלק וכך הלאה....

ב. מה המשמעות של ההוראה לחזור על ההוראות 2-4 ולא רק על ההוראות 2-3 ? האם

ניתן ניתן לבצעה במלואה?

תשובה אפשרית:

ביצוע הוראות 2-3 משמען מעבר משלב אחד לבא אחריו, למשל מהשלב השני לשלישי או מהשלב השלישי לרביעי. הוספת ההוראה מס 4 משמעה חזרה רקורסיבית על התהליך שוב ושוב. יש להדגיש שלא ניתן לבצע את ההוראה במלואה אינסוף פעמים.

ג. השלימו את טבלת הנתונים.

שטח המשולש הנתון $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$ יח"ר

תשובות אפשריות:

ההיקף של השטיח	השטח של השטיח	מספר כולל של המשולשים	מספר המשולשים שנחתכו	שלב
3	S	1	0	0
$(1/2)*3*3$	$\frac{3}{4}S$	3	1	1
$(1/4)*3*9$	$(3/4)*(3/4)S$	9	3	2
$(1/8)*3*27$	$(3/4)*(3/4)*(3/4)S$	27	9	3
$(1/16)*3*81$	$(3/4)*(3/4)*(3/4)*(3/4)S$ של S	81	27	4
				10

מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

n	3^{n-1}	3^n	$(3/4)^n$ של S	$(1/2^n) * 3^n$
-----	-----------	-------	------------------	-----------------

ד. כמה שטח ישאר מהשטח בשלב ה-4 ? בשלב ה-5 ?

ה. באיזה שלב של החיתוך שטח ה"חורים" יהיה גדול משטח השטח?

תשובה:

יש למצוא מתי שטח השטח שנותר קטן מחצי . כלומר לפתור את אי השוויון:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{2}$$

ניתן "לנחש" את הפתרון בעזרת ניסוי וטעיה ונקבל כי בשלב ה-3 השטח קטן מחצי ושווה ל-0.42188 . או לפתור כאי שוויון לוגריתמי.

ו. באיזה שלב של חיתוך ישאר מהשטח רק 1% מהשטח המקורי?

תשובה: $\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{100}$, כלומר $n = \frac{\log(\frac{1}{100})}{\log(\frac{3}{4})} \sim 16$. לאחר השלב ה-16 ישאר 1%

מהשטח המקורי. זו הסיבה גם שקוראים למשולש סירפינסקי – מסננת, כברה.

ז. מה תוכלו לומר על שטחו של שטח ספירנסקי כאשר מספר החיתוכים שואף להיות

אינסופי.

תשובה:

ככל שנמשיך בתהליך בניית שטח סירפינסק שטחו יקטן וישאף לאפס. מתקבלת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת. בעלת מנה חיובית הקטנה מ-1.

ח. מהו ההיקף של השטח לאחר חיתוך אחד ? שימו לב להיקף גם סביב המשולש הקטן המרכזי שנחתך. השלימו בטבלה.

ט. מה תוכלו לומר על ההיקף של שטח ספירנסקי כאשר מספר החיתוכים שואף להיות

אינסופי.

תשובה:

ככל שנמשיך בתהליך בניית שטח סירפינסק היקפו יגדל וישאף לאינסוף. מתקבלת סדרה הנדסית (מתבדרת) בעלת מנה הגדולה מ-1.

י. תארו תכונות מיוחדות של משולש סירפינסקי?

תשובות אפשריות:

- משולש סרפינסקי הוא פרקטל נוצר בסדרה אינסופית של משולשים הדומים לעצמם בכל רמת פירוט שנסתכל בה. ניתן למצוא במשולש סירפינסקי צורות הדומות לעצמן. לתכונה זו קוראים, "דמיון עצמי", כלומר כל חלק של הפרקטל נראה כמו השלם, החלק של החלק נראה כמו החלק וכך הלאה....
- במשולש סירפינסקי, בניגוד לצורות מוכרות אחרות עד היום, השטח הוא סופי (ושואף לאפס) וההיקף אינסופי.

דבר זה מרמז על תכונה יחודית נוספת לפרקטלים שלהם **מימד שבור**.

משימה 3 - להרחבה:

נגדיר מימד של צורה D - מספר הצורות הדומות = מימד (גורם ההגדלה) $m^D = n$

בחנו על פי הגדרה זו:



1. מהו מימד של שטח הריבוע ?

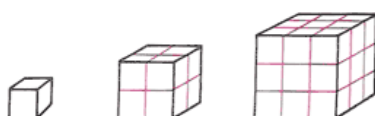
תשובות אפשריות:

אם נגדיל את אורך צלע הריבוע פי 2, נמצא 4 ריבועים דומים. (השטח גדל פי 4)

$$D=2 \leftarrow 2^D = 4$$

אם נגדיל את אורך צלע הריבוע פי 3, נמצא 9 ריבועים דומים. (השטח גדל פי 9)

$$D=2 \leftarrow 3^D = 9$$



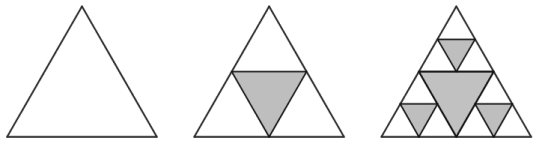
2. מהו מימד של קובייה?

אם נגדיל את אורך מקצוע הקובייה פי 2, נמצא 8

קוביות קטנות. (הנפח גדל פי 8)

$$D=3 \leftarrow 2^D = 8$$

מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל



3. מהו מימד של משולש סירפינסקי?

אם נגדיל את אורך צלע המשולש פי 2, נמצא בשלב הבא של הפרקטל 3 משולשים דומים. מזכיר כי המשולש הפנימי הרביעי נחתך, הוצא ממשולש סירפינסקי.

$$\text{כלומר } 3 = 2^D \Leftrightarrow D = \log_2 3 \Leftrightarrow D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.58$$

מקורות והרחבות

1. הפיצוח – שטיח סירפינסקי
2. הפיצוח – אני דומה לעצמי (מיועד לכיתות חט"ב)
3. משולש סירפינסקי – הוראות הכנה וחקירה – טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב.
4. טבעו המתמטי של הטבע, נחמן גבעולי, מחשבות 48
5. Fractal dimension - הסבר פשוט על מימד של פרקטל

