



אגף מדעים
המזכירות הפדגוגית
משרד החינוך



כנס
קהילות מורים למתמטיקה
ברמת 5 יח"ל
28.6.16



סדנה סביב מאמר

ניסוח של בעיות חקר חדשות
בסביבת גאומטריה דינמית (DGE)
 בעיות הנוצרות למטרת חקר ובעיות הנוצרות במהלך חקר

רוזה לייקין
 על"ה 50

- עקרונות החקר מתוך המאמר
- התנסות בגאומטריה
- התנסות בחקר

משימת חקר

היא משימה מורכבת הכוללת:



- א. פתרון בעיית הוכחה בדרכים שונות
- ב. הפיכת בעיית ההוכחה לבעיית חקר
- ג. חקר, בסביבת גאומטריה דינמית, של האובייקט
הגאומטרי שבמשימה, במטרה לגלות תכונות
נוספות שלו
- ד. הוכחה או הפרכה של ההשערות

משימות חקר

בעיות חקר (בגאומטריה) הן פעילויות הכוללות

עריכת ניסוי

העלאת השערה

ניסוח ההשערה

בחינת ההשערה

הוכחה או הפרכת ההשערה

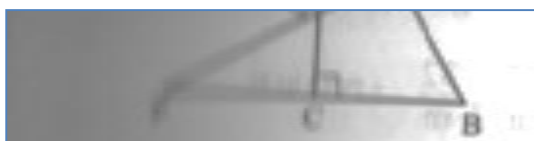
ההשערות שמעלים התלמידים והמורים הופכות
לבעיות הוכחה חדשות.

למה מורים רבים נמנעים ממשימות חקר ?

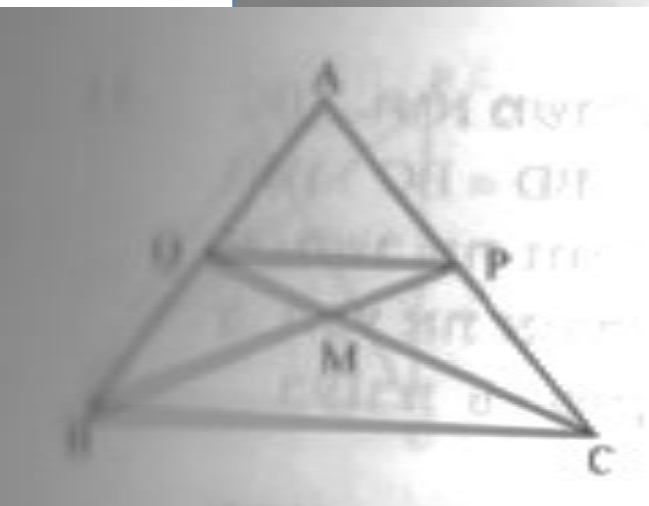
- חוסר נסיון / התנסות
 - מורים לא התנסו בלמידת מתמטיקה באמצעות חקר מתמטי
 - למורים נסיון מוגבל בסביבת גיאומטריה דינאמית
 - תכנון פעילויות חקר
- משימות חקר אינן זמינות למורה בחומרי ההוראה השכיחים
- קשיים טכנולוגיים



בעיה מספר לימוד בגיאומטריה



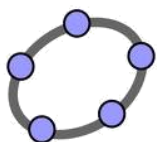
- א. הוכח: $\Delta ASQ \sim \Delta PSB$
ב. הוכח: $\Delta PQC \cong \Delta AQS$



- BP ו-CQ הם תיכונים במשולש ABC
הנפגשים בנקודה M.
א. הוכח: $\Delta AQP \sim \Delta ABC$
ב. הוכח: $\Delta PQM \sim \Delta BCM$

יש-זווית ABC $(AB \perp BC)$. הנקודה E
DE $\perp AC$ ו-BC $\perp AC$

מה עוד אפשר לשאול ?

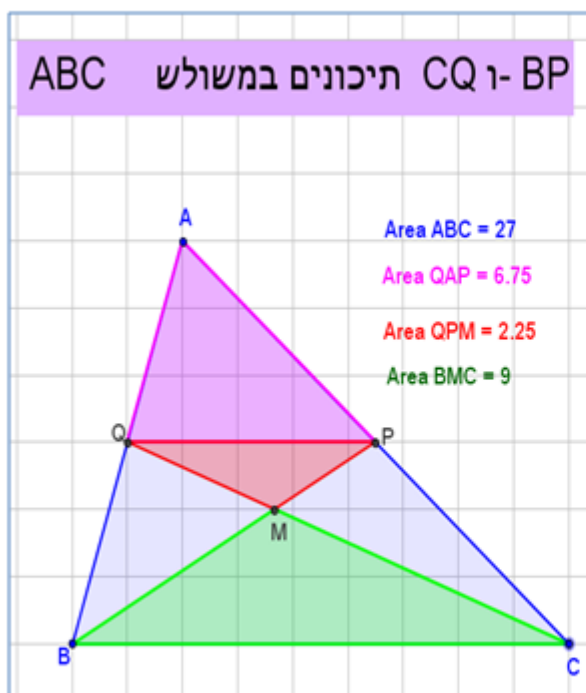


בעיה מספר לימוד בגיאומטריה

מה עוד אפשר לשאול ?

בעיה מספר לימוד בגיאומטריה

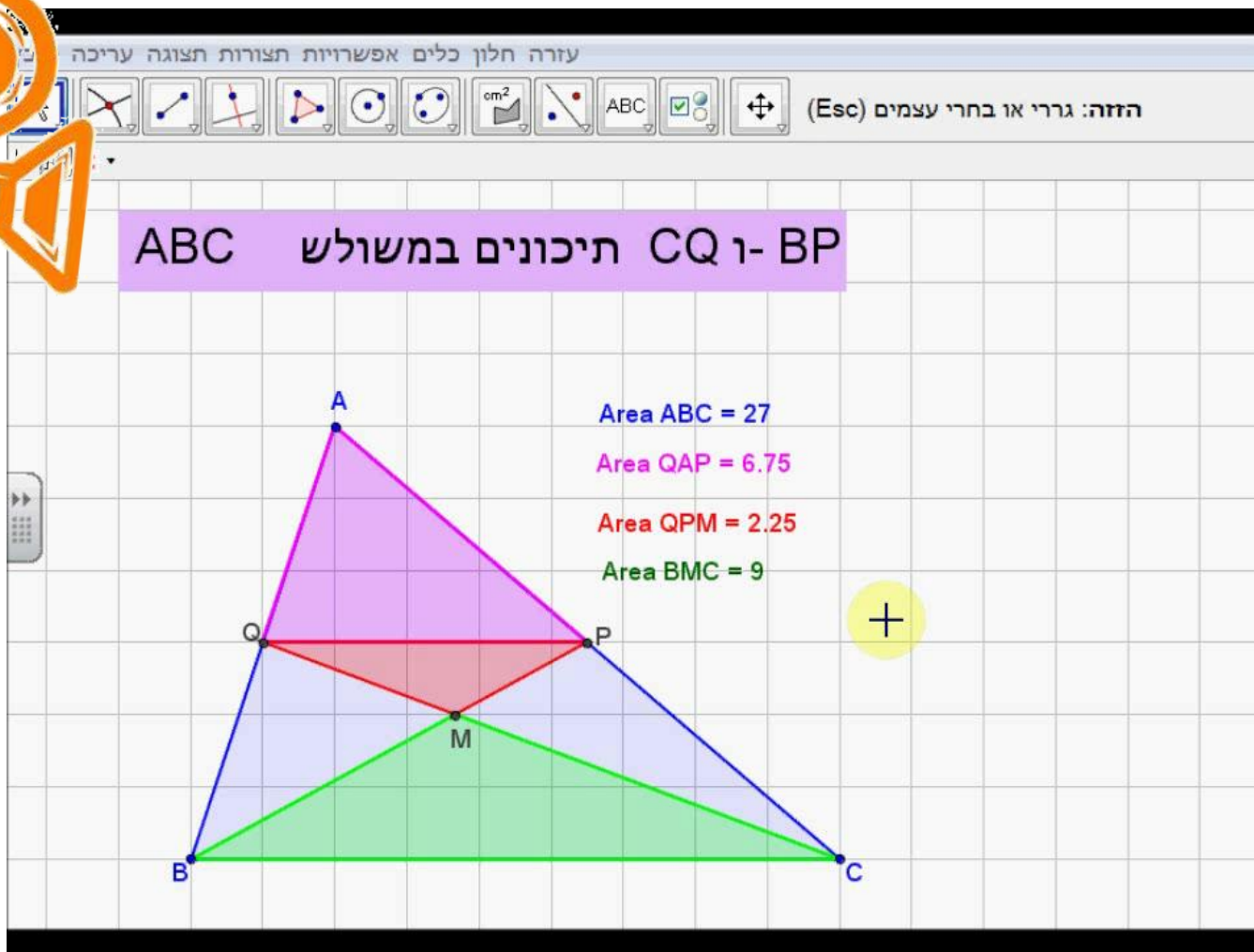
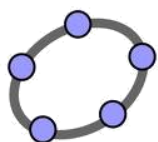
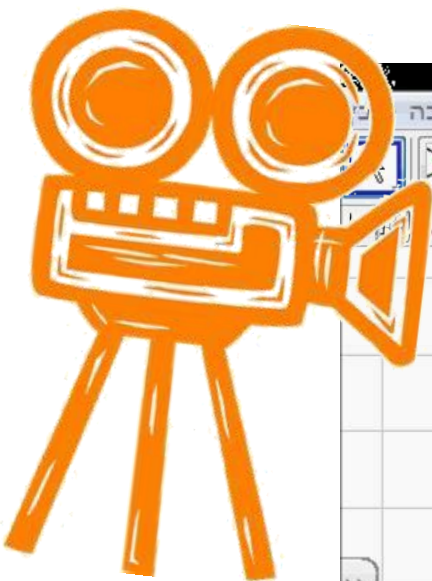
מה עוד אפשר לשאול ?



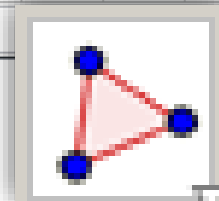
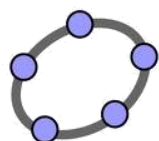
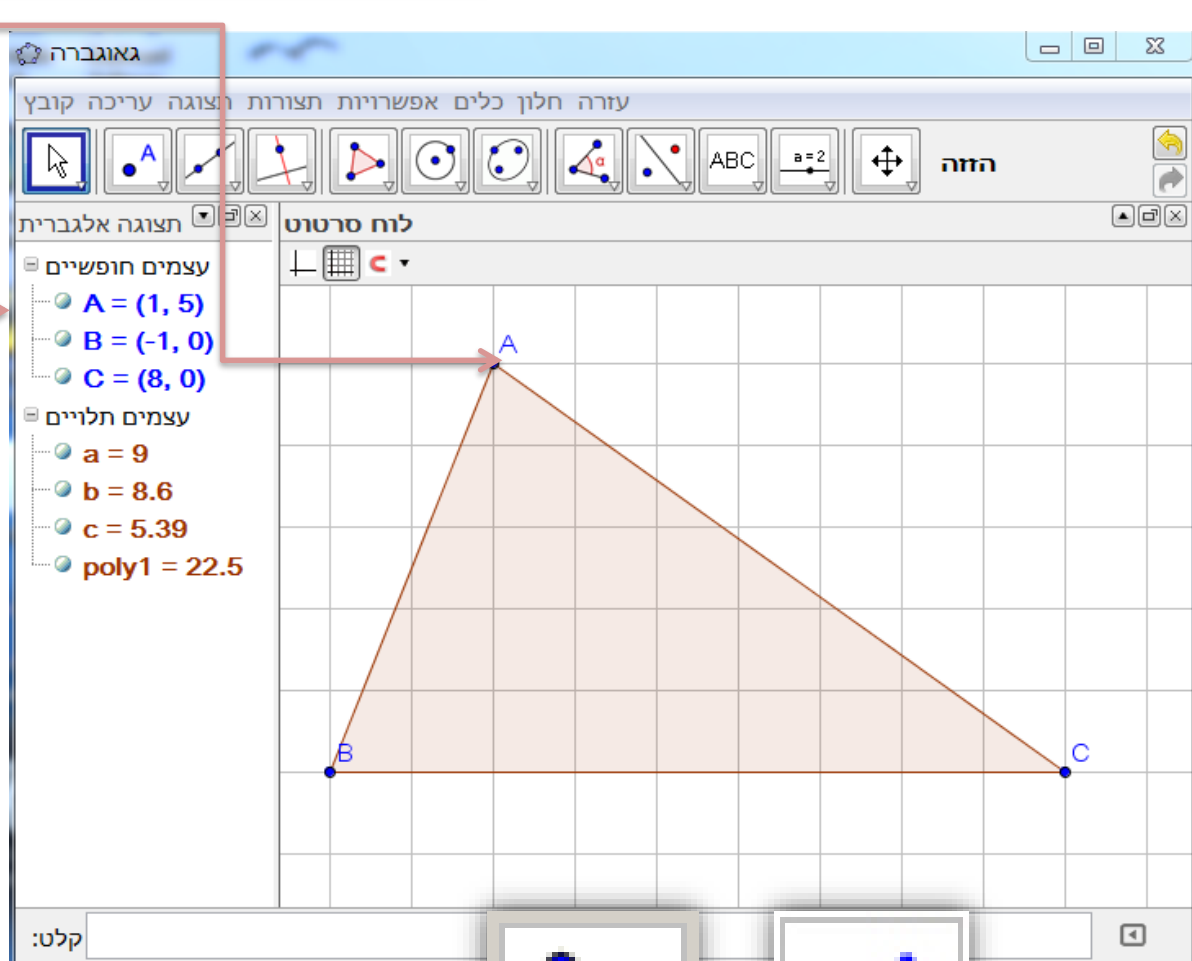
1. האם נוצרו משולשים חופפים?
2. האם נוצרו משולשים דומים?
3. האם ניתן למצוא משולשים שווה שטח?
4. האם קיים יחס מסוים בין שטחי המשולשים? אם כן, מהו?
5. איזה חלק מהווה המשולש האדום מהמשולש כולו?



משולש ותיכונים – מה עוד אפשר לשאול?

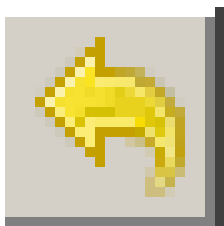
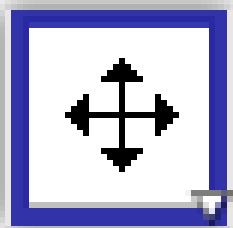
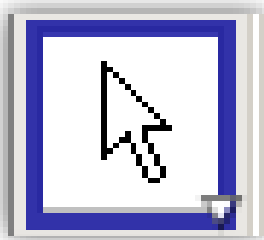


נקודות במערכת צירים



כלים חדשים:

אחד הטיפים אם לא ה...



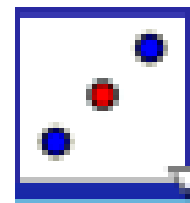
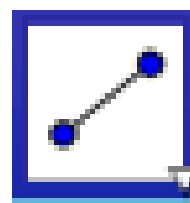
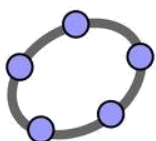
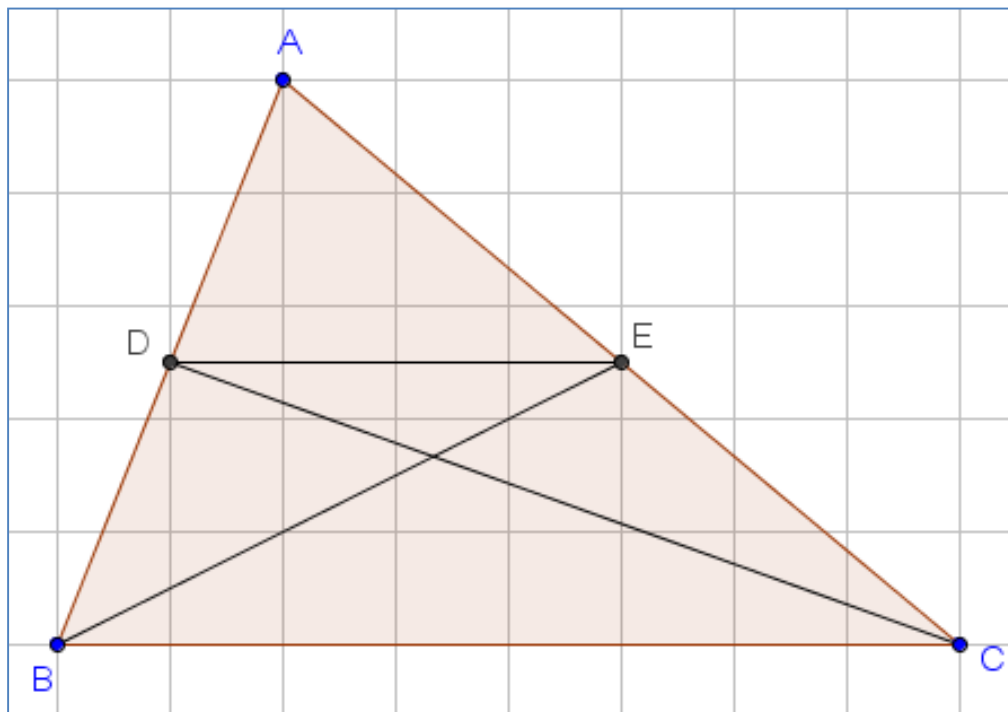
- לבחור, להזיז, לגרור עצם

- להזיז את לוח הגיאומטרי

- אופס התבלבלתי...

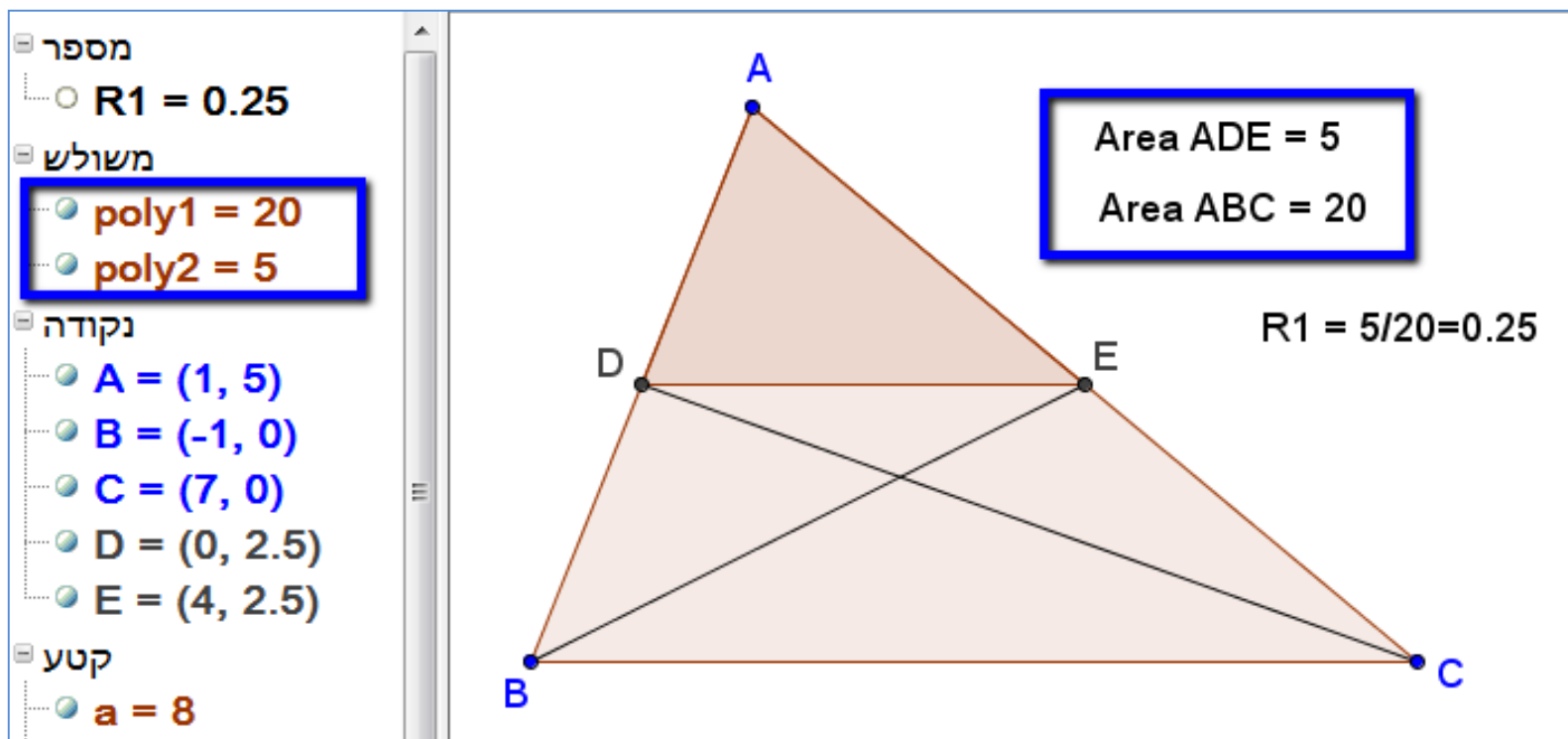


נבנה תיכונים למשולש, קטע אמצעים



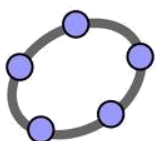
כלים חדשים

נבנה משולשים ונמדוד את שטחם



ואיך נחשב את היחס?

כלים חדשים:



$$R1 = \text{poly2} / \text{poly1} \text{ קלט:}$$



ציור או צורה

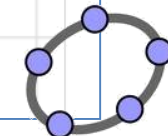
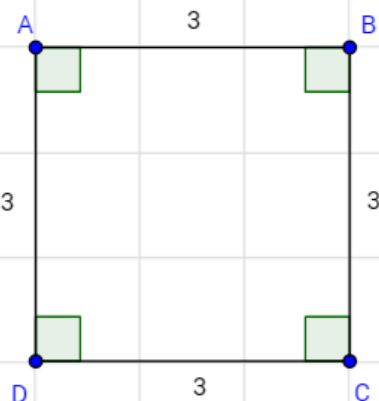
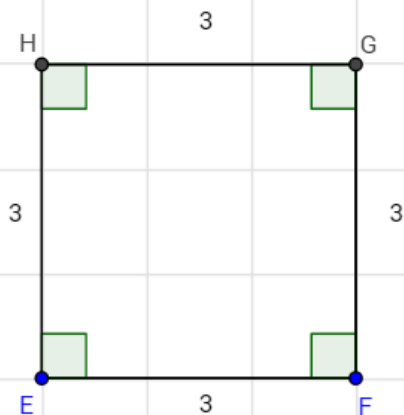
ריבוע בבנייה רכה ובבנייה קשיחה

מוצר בבנייה קשיחה EFGH הריבוע

E ו-F ניתן לגרור רק את הקדקודים
גרירת הקדקודים מאפשרת לקבל ריבועים
בגדלים ובמיקומים שונים
אך אינה מאפשרת "לקלקל" את הריבוע

מוצר בבנייה רכה ABCD הריבוע

ניתן בקלות לקלקל אותו
על ידי גרירת כל אחד מן הקדקודים



ניסוח בעיה חדשה למטרת חקר

גישת **מה אם לא?**

מבוססת על שינויים שיטתיים של הנתונים ובחינת ההשפעה של שינויים אלה על המסקנות.

גישת **מה אם כן?**

מבוססת על הוספת תכונות לאובייקט הנתון.

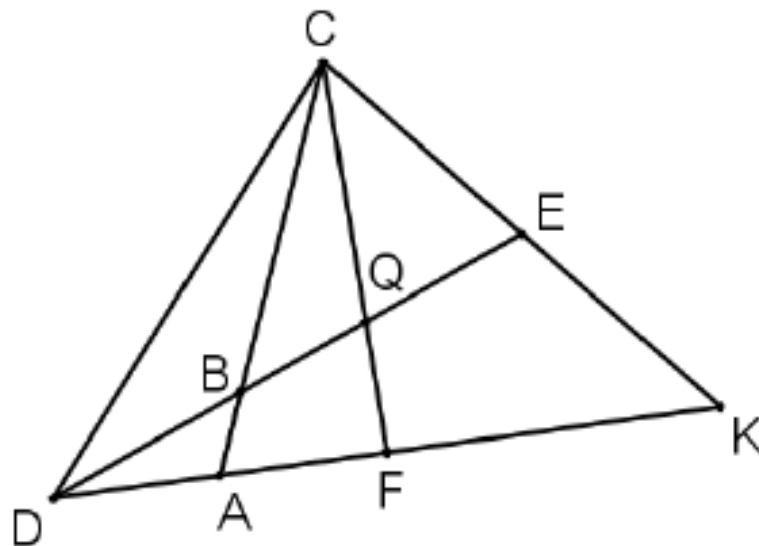
אסטרטגיית **החלפת המסקנה**

שבה הנתונים קבועים ורק המסקנה משתנה.

אסטרטגיית **הסימטריה**

המובילה לניסוח בעיה חדשה שבה הנתונים והמסקנה מחליפים תפקידים.

נתון:
 $\triangle DCK$
 DE תיכון ב- $\triangle DCK$
 CF תיכון ב- $\triangle DCK$
 CA תיכון ב- $\triangle DCF$



- מצאו את היחס $\frac{DB}{DE}$ ונמקו

$$\frac{DE}{DB} = \frac{5}{2}$$

הוכחה 1

הוכחה 1א

בניית עזר: ETIICA

לנוחיות נסמן: $DK=20x$

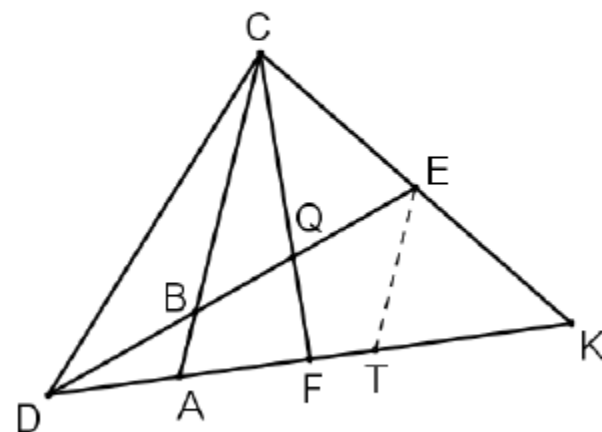
$AK=15x \Leftrightarrow DA=5x, DF=10x \Leftrightarrow DK=20x$

$\Leftrightarrow \Delta ACK$ ו- $CE=EK$ $\Leftrightarrow ET \parallel CA$ $\Leftrightarrow ET$ קטע אמצעים ב- ΔACK

$DT = 12.5x \Leftrightarrow AT = \frac{1}{2} AK = 7.5x$

מכאן, על-פי משפט תאלס:

$$\frac{DE}{DB} = \frac{DT}{DA} = \frac{12.5x}{5x} = \frac{5}{2}$$



$$\frac{DE}{DB} = \frac{5}{2}$$

הוכחה 2

בניית עזר:

נסמן ב- G את נקודת המפגש של הישרים EF ו- CA.

נסרטט את GA, GD, GF.

EF קטע אמצעים במשולש DCK $\Leftrightarrow DC = 2EF, DC \parallel EF$

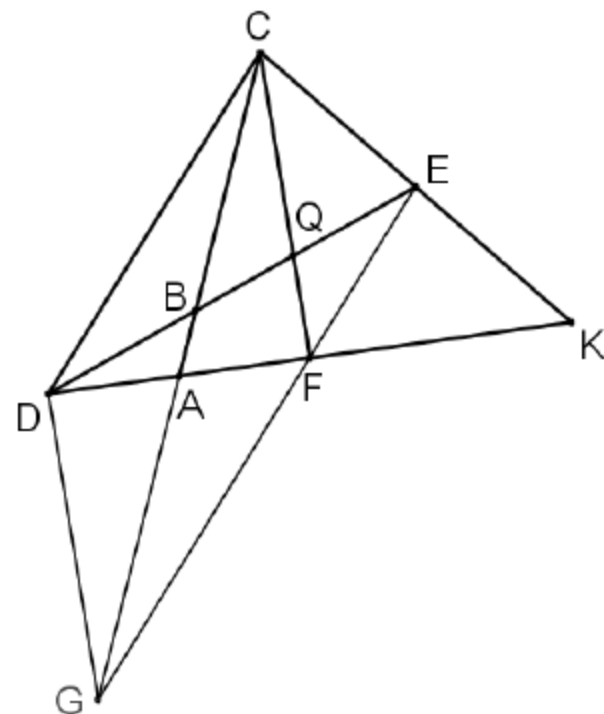
$DC = GF \Leftrightarrow \triangle DCA \cong \triangle FGA \Leftrightarrow DA = AF, DC \parallel GF$

נסמן $EF = x$ ונסיק $GF = 2x, GE = 3x$

$$\frac{DB}{BE} = \frac{DC}{GE} \Leftrightarrow \triangle DCB \sim \triangle EGB$$

נסמן $DB = 2y$ ונקבל $BE = 3y, DE = 5y$.

$$\text{לכן: } \frac{DE}{DB} = \frac{5}{2}$$



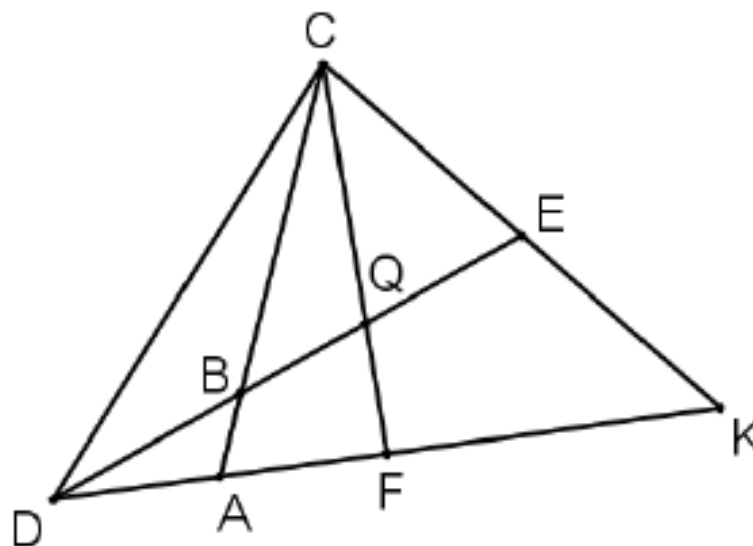
Problem Posing



בעיות חקר מסוג זה מובילות לשלושה טיפוסים של
Problem Posing (ניסוח בעיות חדשות)

1. בעיות הנוצרות ומנוסחות **במהלך הוכחה**
2. בעיות הנוצרות ומנוסחות **במטרה לזמן חקר**
3. בעיות הנוצרות **במהלך חקר** או **במהלך בנייה**

נתון:
 $\triangle DCK$
 DE תיכון ב- $\triangle DCK$
 CF תיכון ב- $\triangle DCK$
 CA תיכון ב- $\triangle DCF$



מצאו קשרים בין אלמנטים של הצורה הנתונה.

בעיה 4: נתון: $\triangle DCK$, DE תיכון ב- $\triangle DCK$, CF תיכון ב- $\triangle DCK$, CA תיכון ב- $\triangle DCF$. Q מפגש התיכונים

בניית עזר "בתוך הצורה הנתונה": $ET \parallel CA$.

הוכיחו:

$$\frac{AT}{DK} = \frac{3}{8} \quad \text{ה4}$$

$$\frac{BC}{AB} = 4 \quad \text{א4}$$

$$\frac{QE}{BQ} = \frac{5}{4} \quad \text{ו4}$$

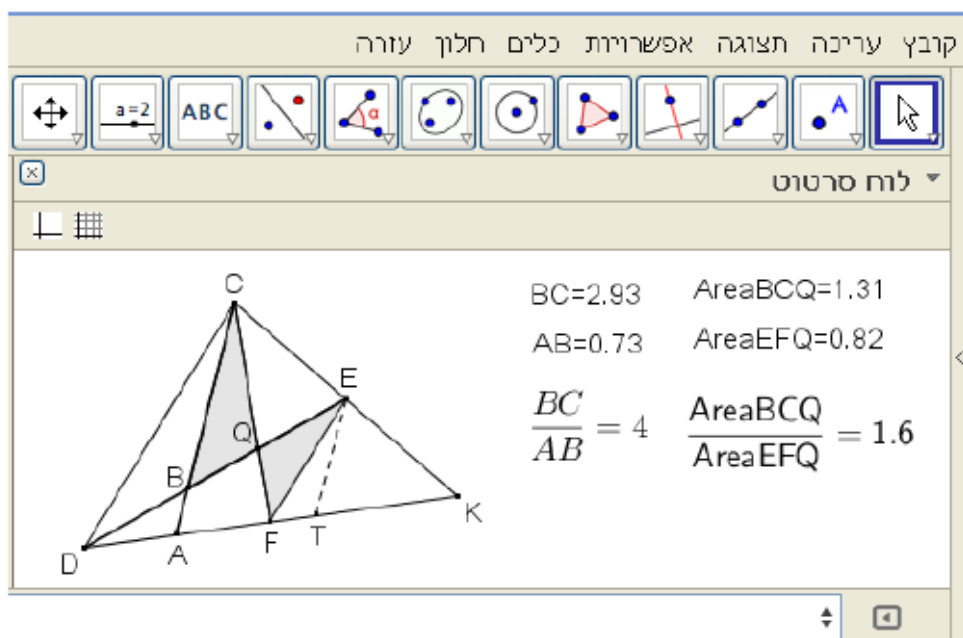
$$\frac{CQ}{QF} = 2 \quad \text{ב4}$$

$$\frac{DA}{DT} = \frac{2}{5} \quad \text{ז4}$$

$$\frac{A(BCQ)}{A(EQF)} = \frac{8}{5} \quad \text{ג4}$$

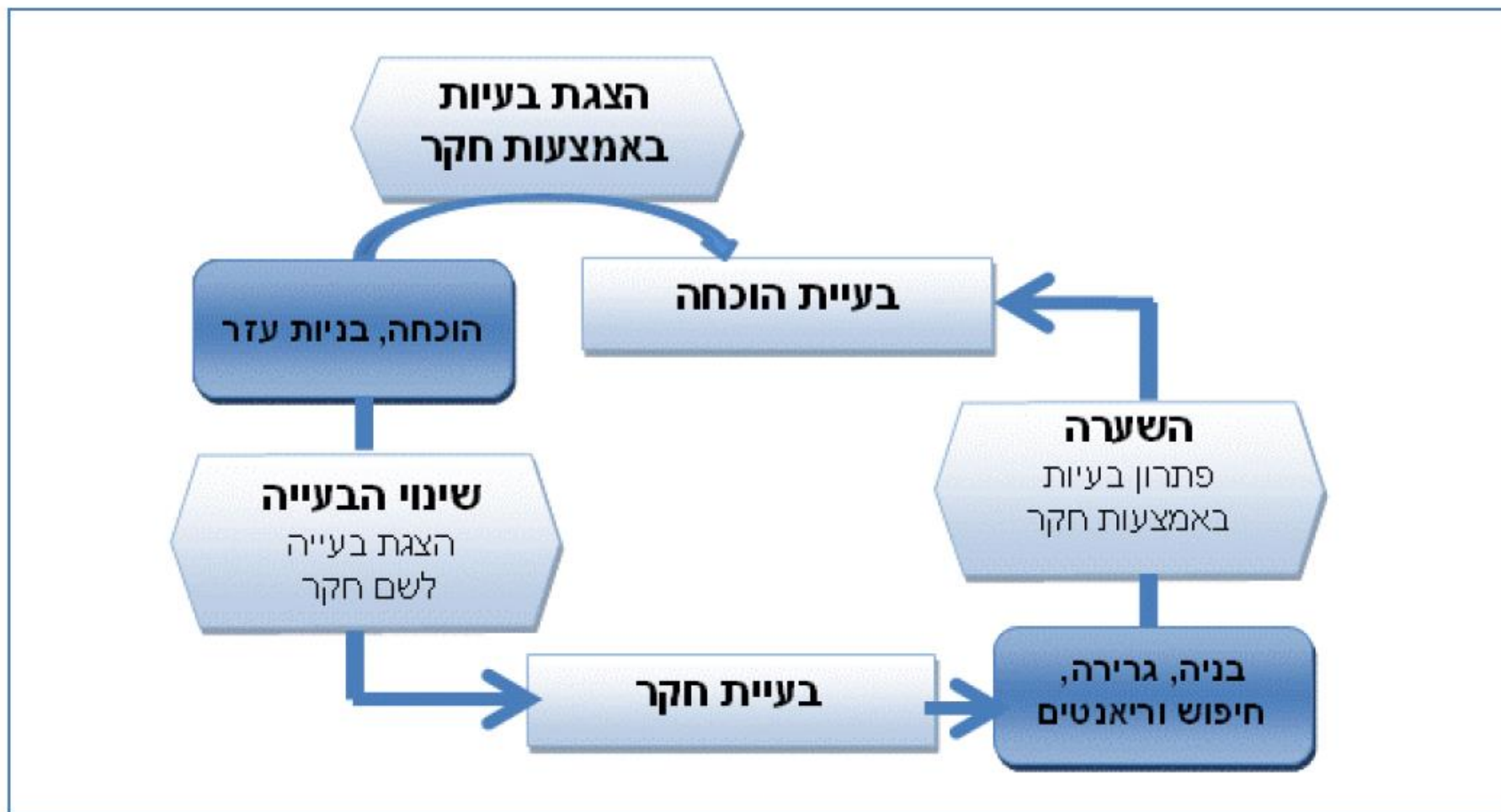
$$\frac{A(DCK)}{A(ETK)} = \frac{16}{3} \quad \text{ח4}$$

$$\frac{A(DCQ)}{A(EQF)} = 4 \quad \text{ד4}$$



הבעיות החדשות מבקשות להוכיח תכונות שהתגלו. התכונות ב4 ו- ד4 הן טריוויאליות.

יצירת בעיות וניסוחן בסביבת גאומטריה דינאמית



מכיוון שהטילו ספק - ביכולתו של כל משתתף לגלות באופן עצמאי

עושר כזה של תכונות, הגיעו המשתתפים למסקנה כי

עבודה בצוות היא הכרחית לגילוי תכונות רבות,

ושמכלול התכונות שגילו ביחד משמש מקור לפיתוח מומחיותם בניסוח

בעיות.

לולאת השכנוע

כדי ליישם גישות פדגוגיות חדשות, מורים צריכים להיות משוכנעים בהתאמתן של גישות אלו לעבודתם עם תלמידים, ובאותו הזמן להיות משוכנעים בהתאמתן כדי להטמיע אותן בבית הספר.

Leikin, 2008