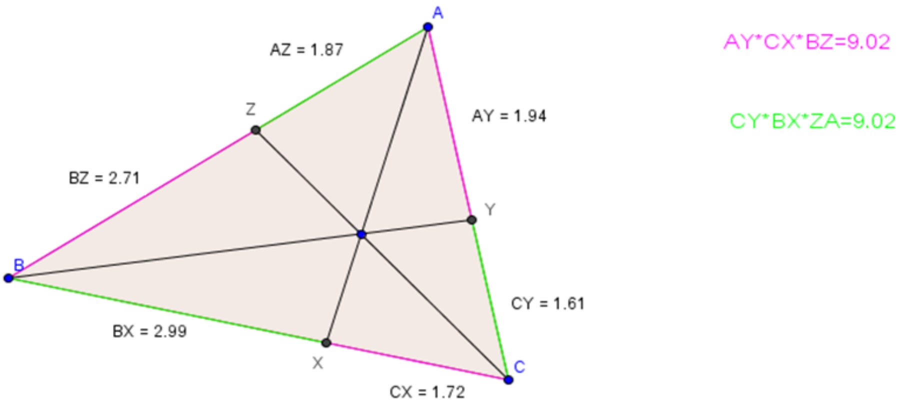
מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

## סדנא בנושא

# צ'בה וחברים

## תכונות קווים מיוחדים במשולש בראיה "אחרת"

מציעות פאינה פרצב ואילאיל בורדה




תודות לסרג'יו לייקין על סיוע בכתיבה המתמטית

## מבוא

הפעילות בסדנא "משפט צ'בה" מיועדת להשגת מספר מטרות:

1. היכרות עם משפט מפורסם ומשמעותי שאמנם אינו בתכנית הלימודים, אך קל להוכחה בכלים המתאימים לכיתות ט'-י'
2. יצירת ראיה אינטגרטיבית של נושאים בגיאומטריה. נושאים הנלמדים כבלתי קשורים הופכים "לפתע" כחלק מיחידה אחת.
3. התנסות בהוכחת משפטים בדרכים שונות
4. חויה "אסטטית" – נגיעה ביופי של המתמטיקה – הנגיעה בתחושה שמדובר בשלמות אחת.

נושאים מתמטיים הנלמדים ביחידה:

1. משפט צ'בה: משפט המדבר על קטעים היוצאים מקודקודי משולש ונפגשים בנקודה אחת.
2. תכונת נקודות מפגש התיכונים, חוצי הזוית והגבהים במשולש: מבט בראיה אינטגרטיבית שאינה כלולה בתכנית הלימודים
3. תרגול משפט ישר והפוך

## מהלך הסדנה

- משפט צ'בה כיוון ראשון – הבנת המשפט והוכחתו במליאה (10 דקות)*יש אפשרות לקצר ולהראות רק את רעיון ההוכחה בסדנא ולהשאיר את השלמת פרטיה לע"צ או קריאה בבית*
- עבודה עצמית מודרכת: יישומי המשפט – למפגש התיכונים וחוצי הזוויות במשולש, הכיוון ההפוך למשפט צ'בה , מפגש הגבהים במשולש (25 דקות)
- הצגת פתרונות במליאה (10 דקות)
- דיון: מה הערך המוסף של הסדנא (5 דקות)

פעיליות אופציונליות נוספות (במפגש או בבית):

- הוכחות נוספות למשפט צ'בה
- משפט מנלאוס
- הוכחות נוספות למשפטים שעסקנו בהם.

### הנחיות והמלצות

1. אם מקצים מספיק זמן לסדנא ניתן לתת למשתתפים זמן לצורך נסיון למצוא הוכחה באופן עצמאי, ניתן "לשחרר רמזים".
2. חשוב לא ליצור תסכול אצל המשתתפים – לא באמת מצפים מכולם להגיע להוכחת המשפט בזמן המוקצב בסדנא וחשוב להבהיר זאת ולעודד את המשתתפים. הוכחת היישומים (מפגש התיכונים, חוצי הזוית והגבהים) די מיידית אחרי הבנת המשפט, מה שייתן למשתתפים תחושה טובה.
3. אם הסדנא מובאת במסגרת פינה חמה ניתן להציג את המשפט ללא הוכחה ולהשאיר השלמת ההוכחה בבית.
4. החלקים האחרונים של הסדנא הם הרחבות אופציונליות. ניתן לתת אותם כהרחבה לע"ע בבית.
5. המטרה המרכזית של הסדנא היא יישום המשפט למפגש הקוים המיוחדים במשולש ולזה יש להקדיש זמן.

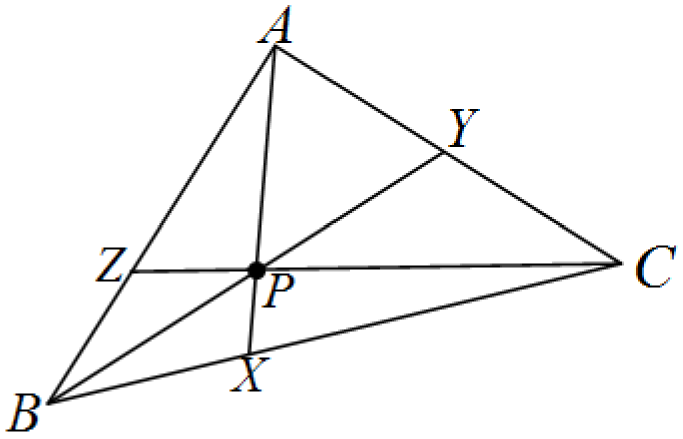
## תקציר :

משפט צ'בה (Giovanni Ceva 1648-1734) אינו נכלל בתכנית הלימודים הקיימת. משפט זה קל ביותר להוכחה בכלים גיאומטריים פשוטים (כבר בכיתה ט' ו/או י') . הכרתו מאפשרת להבין עובדה חשובה:

העובדה שקוים מיוחדים במשולש (גבהים, תיכונים, חוצי זויות) נפגשים (כל שלשה) בנקודה אחת נובעת ממקור אחד!!

נוסח המשפט:

במשולש ABC 3 קטעים AX, BY, CZ , כאשר X,Y,Z נקודות על צלעות המשולש (ראה שרטוט). הקטעים נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם




$$\frac{AY}{CY}\cdot\frac{CX}{BX}\cdot\frac{BZ}{AZ}=1$$

(נוח להסתכל על הביטוי כמכפלה של מנת קטעים הנוצרים על צלעות המשולש ב"הליכה" עם כיוון השעון)

# מבנה הסדנא

הצגת משפט צ'בה על ידי המנחים. רצוי להשתמש ביישום הדינמי:
יישום להמחשת משפט צ'בה
המנחה יזיז את הנקודה P ו/או את הקודקודים ויבדוק איך משתנים הקטעים המוקצים על צלעות המשולש ומה קורה למכפלה המחושבת.

**במליאה:**

הוכחת הכיוון הראשון של משפט צ'בה:

אם במשולש ABC 3 קטעים AX, BY, CZ , כאשר X,Y,Z נקודות על צלעות המשולש (ראה שרטוט) וידוע שהקטעים נפגשים בנקודה אחת, אז מתקיים:

$$\frac{AY}{CY}\cdot\frac{CX}{BX}\cdot\frac{BZ}{AZ}=1$$

אפשר להציג אחת משתי ההוכחות המצורפות.

*אם בוחרים להציג משפט זה במסגרת פינה חמה ניתן להציג רק את רעיון ההוכחה ולהשאיר את השלמת פרטים לצ"ע או קריאה בבית.*

**מכאן נעבור לעבודה עצמית:**

**דף עבודה 1:**

**שימושים למשפט צ'בה**

שימוש ראשון:

א. נתון: במשולש ABC התיכונים AM,BD נפגשים בנקודה O . המשך את CO עד נקודת חיתוכו עם הצלע AB.
הוכח על בסיס משפט צ'בה: המשך CO חוצה את הצלע AB

ב. הסבר כיצד מתוך מה שהוכחת בסעיף זה ניתן להסיק ש: **שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת**.

שימוש שני:

א. נתון: במשולש ABC AK חוצה את הזוית A , BM חוצה את הזוית B. הם נפגשים בנקודה O.

הוכח: CO חוצה את הזוית C.

הדרכה: שלב בין משפט צ'בה למשפט חוצה הזוית (בכיוונו ההפוך).

ב. הסבר כיצד מתוך מה שהוכחת בסעיף זה ניתן להסיק ש:
**שלושת חוצי הזויות במשולש נפגשים בנקודה אחת**

## דף עבודה 2

### משימה 1

א. משפט צ'בה בנוסחו המלא מנוסח כמשפט "אם ורק אם". במליאה עסקנו בכיוון אחד. נסח את הכיוון ההפוך לכיוון שעסקנו בו בפתיחת המפגש.

הניסוח:

אם שלושה קטעים שיוצאים מקודקודי משולש אל הצלעות שמולם יוצרים את הפרופורציות.......

אז הם נפגשים.......

ב. הוכח את הטענה שניסחת בעזרת ההדרכה הבאה:

העבר מקודקודי המשולש (למשל מB ו C)שני ישרים היוצרים את הפרופורציות הנתונות על הצלעות מולם. הישרים נפגשים בנקודה שנקרא לה P. העבר ישר מ A דרך P. הוא יחתוך את BC בנקודה X'. הוכח (על סמך משפט צ'בה בכיוון הראשון שכבר הוכחנו) ש X' מתלכדת עם X (ראה ניסוח המשפט הישר).

### משימה 2

האם שלושת **הגבהים** במשולש נפגשים בנקודה אחת?? הוכח טענתך בעזרת המשפט שהוכחנו. (השתמש בדמיון משולשים או בקיצור בטריגונומטריה).

### משימה 3 (אופציונלית)

חפש הוכחות נוספות למשפט צ'בה מעבר לזו שהוצגה במליאה :

רעיון לדרכי הוכחה:

דרך א':

מצא יחסים בין שטחי משולשים בעלי גבהים משותפים, או בסיסים משותפים, והעזר גם במשולשים דומים!!!

דרך ב':

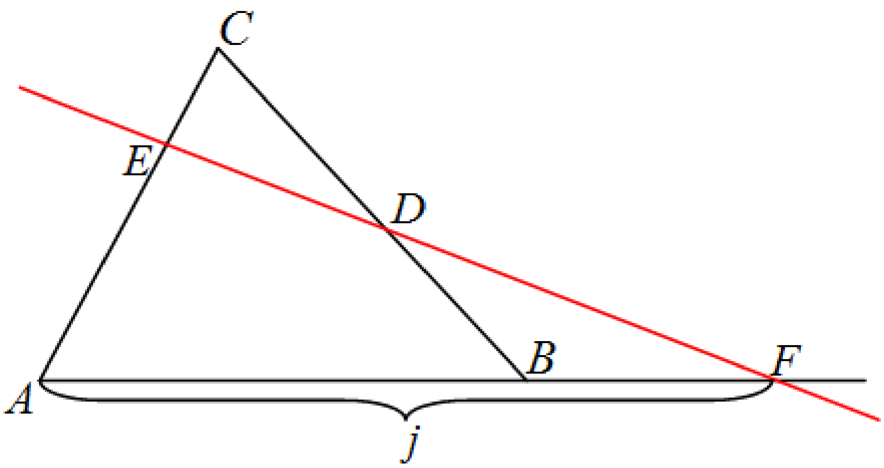
העבר (כקו עזר) מקביל לבסיס BC דרך הקודקוד A. מצא פרופורציות בין משולשים דומים. ניתן גם להצליב בין הפרופורציות השונות!

וחפש דרכים נוספות!!

## משימה להרחבה:

### משפט מנלאוס

תנאי הכרחי ומספיק לכך ששלוש נקודות הנמצאות על צלעות המשולש או על המשכיהן יהיו על ישר אחד הוא בסימוני השרטוט למטה ש:




$$\frac{EC}{AE}\cdot\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AF}{BF}=1$$

קישור ליישום הממחיש את המשפט:
משפט מנלאוס.ggb
הזז את קודקודי המשולש או את הנקודות על צלעותיו ובדוק את נכונות המשפט!!

משימות:

1. פרק את משפט מנלאוס לשני שיווניו כמשפט ישר ומשפט הפוך
2. הוכח את המשפט הישר

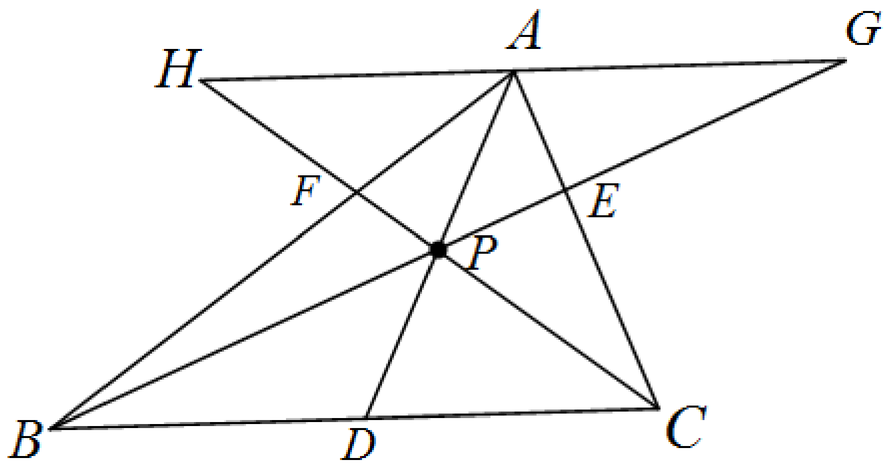
<u>הדרכה</u> להוכחה: שרטט ישר מחוץ למשולש. העבר דרך קודקודי המשולש מקבילים לישר המחבר את שלוש הנקודות . השתמש במשפט תאלס.

# הצעות לפתרונות

### הוכחות למשפט צ'ב'ה:

### הוכחה ראשונה:

הוכחה המבוססת רק על דמיון משולשים




ניתן להעזר ביישום המצורף: **הוכחת משפט צ'ב'ה בעזרת דמיון משולשים**

הסבר ההוכחה:

בנית עזר **:** נעביר דרך A מקביל ל BC ונמשיך את $BE$ עד לחיתוך עם המקביל שיצרנו בנקודה $G$ , ואת $CF$ עד לחיתוך עם $AG$ בנקודה $H$ . נקבל בין היתר ארבעה זוגות של משולשים דומים **:** (1) $\triangle AHF \sim \triangle BCF$ ,

(2) $\triangle AGE \sim \triangle CBE$ ,

(3) $\triangle AGP \sim \triangle BDP$ ,

(4) $\triangle AHP \sim \triangle CDP$ .

הפרופורציות בין הקטעים המתקבלות מהמשולשים הדומים הן בהתאמה :

(1) $\frac{AH}{BC}=\frac{AF}{FB}$ ,

(2) $\frac{BC}{AG}=\frac{CE}{AE}$ ,

$$\begin{cases} \frac{AG}{BD}=\frac{AP}{DP} & (3) \\ \frac{AH}{CD}=\frac{AP}{DP} & (4) \end{cases} \Rightarrow \frac{AH}{CD}=\frac{AG}{BD} \Leftrightarrow (5)\ \frac{AG}{AH}=\frac{BD}{CD}\ ;$$

לאחר מכפלת השוויונים (1) , (2) ו – (5) נקבל :

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{BD}{CD}=\frac{AH}{BC}\cdot\frac{BC}{AG}\cdot\frac{AG}{AH}=1 \quad \blacksquare$$

### הוכחה שניה:

אם אתה מול מחשב העזר ביישום להבהרת הפתרון (לשימוש המנחה או הקורא את ההוכחה הפורמלית):

הוכחת משפט צ'בה בעזרת גבהים - ישום להבהרת ההוכחה

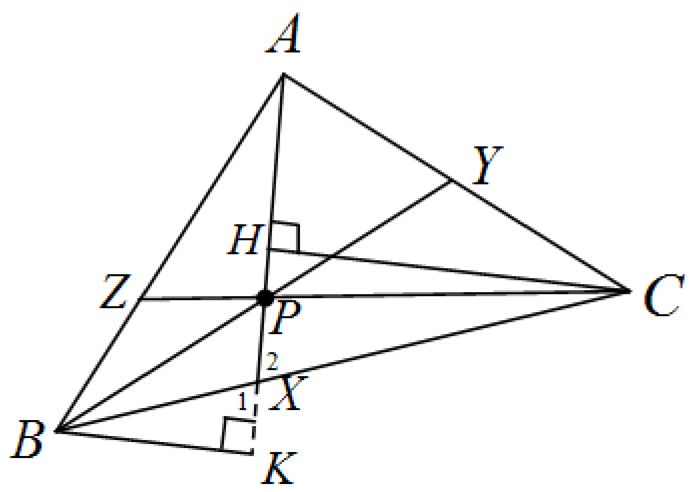
הוכחה פורמלית מסודרת:

בתוך משולש $\triangle ABC$ נתונה נקודה $P$ כלשהי. המשכי הקטעים

$AP$ , $BP$ ו – $CP$ חותכים את הצלעות ממול בנקודות $X$ , $Y$

ו – $Z$ בהתאמה .

צ"ל: $AY \cdot CX \cdot BZ = CY \cdot BX \cdot AZ$ .




בהוכחה נשתמש ביחסי שטחים בין המשולשים בעלי אותו הגובה .

$\frac{BX}{XC} = \frac{S_{\triangle BPX}}{S_{\triangle CPX}} = \frac{S_{\triangle BAX}}{S_{\triangle CAX}}$ ( גבהים משותפים ) .

ב – $\triangle ABP$ ו – $\triangle ACP$ הבסיס $AP$ הוא משותף . נוריד את הגבהים $BK \perp AP$ ו – $CH \perp AP$ .

$\angle X_1 = \angle X_2$ ( קדקודיות ) ; $\angle K = \angle H = 90^\circ$ ( גבהים ) $\Leftarrow$ $\triangle BKX \sim \triangle CHX$ ( ז.ז. ) $\Leftarrow$

(1) $\frac{B\ K}{C\ H} = \frac{B}{X}$ ( יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים ) $\Leftarrow$ (2)

$\frac{BX}{XC} = \frac{BK}{CH} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}$ ( בסיס $AP$ משותף ולפי (1) ) .

באותה הדרך רואים כי : (3) $\frac{AZ}{ZB} = \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle BPC}}$ ו – (4) $\frac{YC}{AY} = \frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle APB}}$ ;

ולאחר מכפלה של (2) , (3) ו – (4) נקבל

$$\frac{\cancel{S_{\triangle ABP}}}{\cancel{S_{\triangle ACP}}} \cdot \frac{\cancel{S_{\triangle APC}}}{\cancel{S_{\triangle BPC}}} \cdot \frac{\cancel{S_{\triangle BPC}}}{\cancel{S_{\triangle APB}}} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{YC}{AY} = 1$$

כלומר , $AY \cdot CX \cdot BZ = CY \cdot BX \cdot AZ$ ■

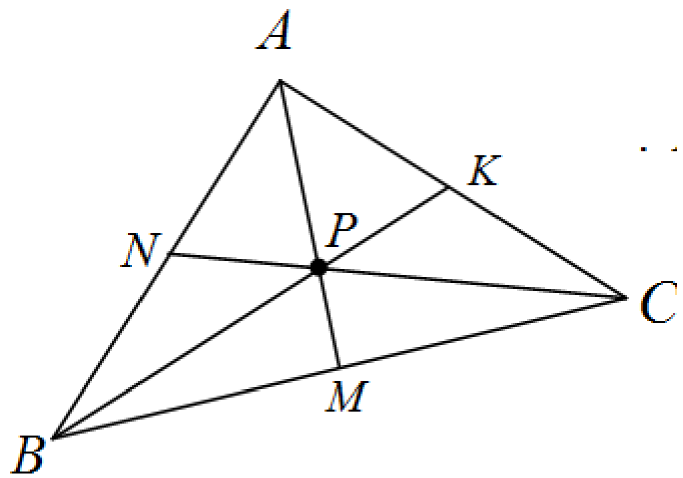
### משימה 2

הוכחת המשפטים : שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת וכך גם חוצי הזויות.

**פתרון:**

<u>מפגש התיכונים.</u>

נתונים $BK$ ו – $CN$ שני התיכונים במשולש $\triangle ABC$ הנפגשים נקודה $P$ .




נוכיח כי המשכו של הקטע $AP$ הוא גם כן תיכון במשולש $\triangle ABC$.

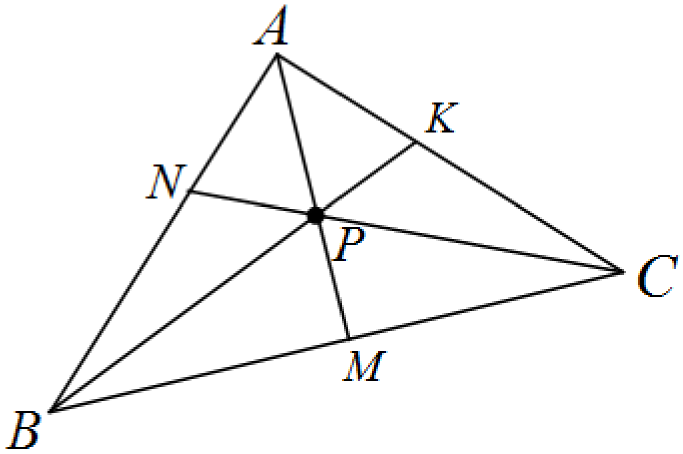
לפי משפט צ'בה : $AK \cdot CM \cdot BN = CK \cdot BM \cdot AN$ .

הרי $AN = BN$ ו – $AK = KC$ , ולאחר הצמצום נקבל :

$$\frac{\cancel{AK} \cdot CM \cdot \cancel{BN}}{\cancel{AK} \cdot \cancel{AN}} = \frac{\cancel{CK} \cdot BM \cdot \cancel{AN}}{\cancel{AK} \cdot \cancel{AN}} \Leftarrow BM = MC \ ■$$

## מפגש חוצי הזויות.

נתונים $BK$ ו $-CN$ שני חוצי הזויות במשולש $\triangle ABC$ הנפגשים נקודה $P$ .




נוכיח כי המשכו של הקטע $AP$ הוא גם כן חוצה הזוית במשולש $\triangle ABC$.

לפי משפט חוצה זוית מקבלים : $\frac{BM+MC}{BN+NA}=\frac{CK}{AK}$

ו $-\frac{AN}{BN}=\frac{CK+KA}{BM+MC}$ ; לאחר מכפלת השוויונים נקבל :

(1) $\frac{AN}{BN}\cdot\frac{CK}{AK}=\frac{CK+KA}{\cancel{BM+MC}}\cdot\frac{\cancel{BM+MC}}{BN+NA}\Leftarrow\frac{AN}{BN}\cdot\frac{CK}{AK}=\frac{CK+KA}{BN+NA}=\frac{CA}{BA}$ ;

לפי משפט צ'בה : $1=\frac{CK\cdot BM\cdot AN}{AK\cdot CM\cdot BN}\Leftrightarrow\frac{CM}{BM}=\frac{CK\cdot AN}{AK\cdot BN}$ , ולאחר ההצבה ל $-(1)$

נקבל :

$\frac{CM}{BM}=\frac{CA}{BA}$ , שקובע כי $AM$ הוא חוצה הזווית ( לפי המשפט ההפוך למשפט חוצה זוית ) ■

---

ניסוח והוכחת הכיוון ההפוך במשפט צ'בה.

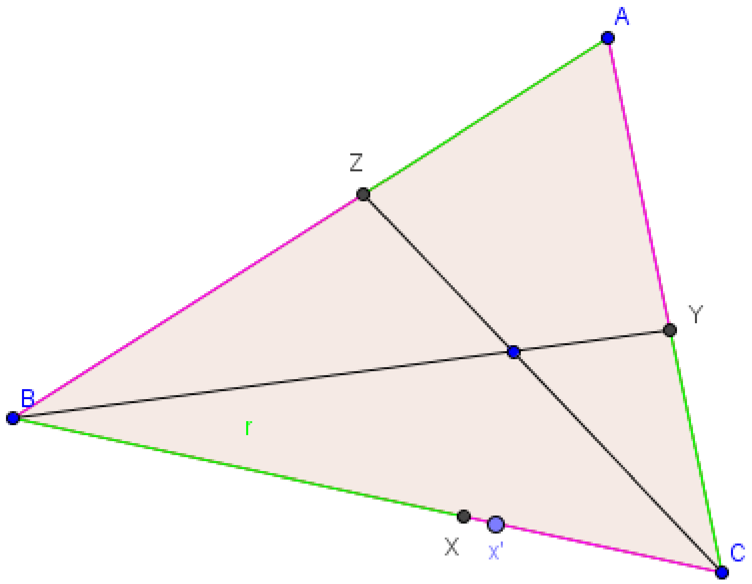
**פתרון:**

<u>הניסוח:</u>

<u>אם</u> שלושה קטעים שיוצאים מקודקודי משולש אל הצלעות שמולם יוצרים את הפרופורציות $\frac{AY}{CY}\cdot\frac{CX}{BX}\cdot\frac{BZ}{AZ}=1$

<u>אז</u> הם נפגשים בנקודה אחת.

<u>הוכחה:</u>




נתון לנו שבמשולש ABC המשורטט לעיל הנקודות X, Y, Z מקיימות:

$$\frac{AY}{CY}\cdot\frac{CX}{BX}\cdot\frac{BZ}{AZ}=1.$$

נחבר את הקטעים CZ ו BY. הקטעים נפגשים בנקודה שנקרא לה P. העבר ישר מ A דרך P. הוא יחתוך את BC בנקודה X'. על סמך משפט צ'בה בכיוון הראשון שכבר הוכחנו מתקיים:

$$\frac{AY}{CY}\cdot\frac{CX'}{BX'}\cdot\frac{BZ}{AZ}=1$$

משני השיוויונים שרשמנו נובע:

$$\frac{CX'}{BX'}=\frac{CX}{BX}$$

משמעות הדבר היא שהנקודות X ו X' מחלקות את BC באותו יחס ולכן X מתלכדת עם X' .

## מפגש הגבהים:

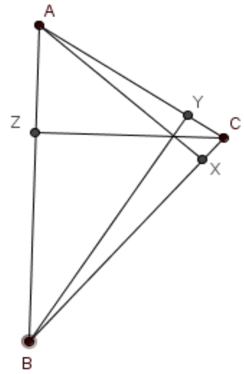
קל מאד להעזר במשפט צ'בה כאשר התלמידים מכירים את ההגדרות הבסיסיות של פונקציות טריגונומטריות במשולש ישר זוית.

בכיתה ט' ניתן להיעזר בדמיון משולשים לביטוי אותן פרופורציות, אלא שאז הכתיבה כמובן מסורבלת יותר.

בעזרת הגדרת הקוסינוס נעזר בכיוון ההפוך במשפט צ'בה:

נבדוק מה ערך הביטוי:

$$\frac{AY}{CY}\cdot\frac{CX}{BX}\cdot\frac{BZ}{AZ}$$




נציב:

$$\frac{c\cdot\cos\alpha}{a\cdot\cos\gamma}\cdot\frac{b\cdot\cos\gamma}{c\cdot\cos\beta}\cdot\frac{a\cdot\cos\beta}{b\cdot\cos\alpha}$$

כל הגורמים מצטמצמים! המכפלה שווה 1 ולכן שלושת הגבהים נפגשים בנקודה אחת!!

## פתרונות למשימות להרחבה:

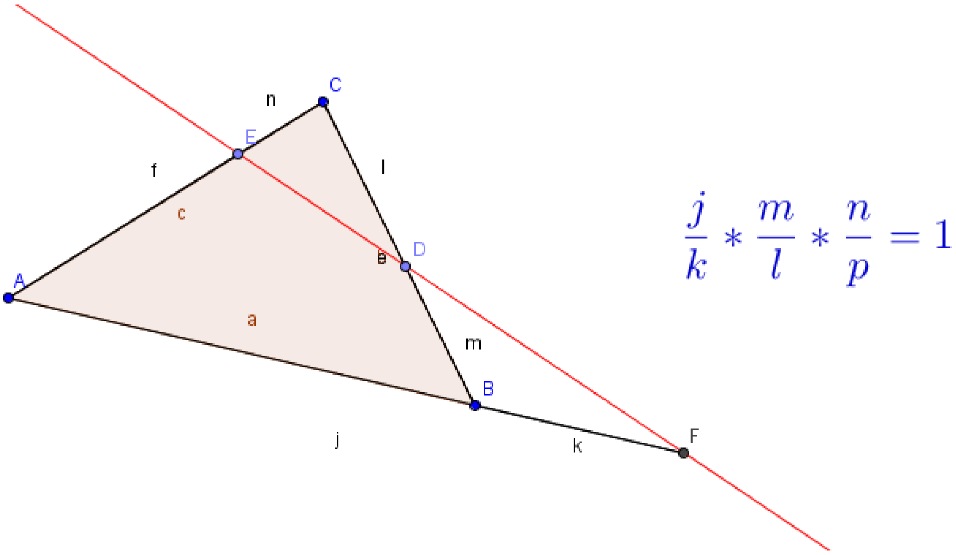
<u>משפט מנלאוס</u>

נוסח המשפט:

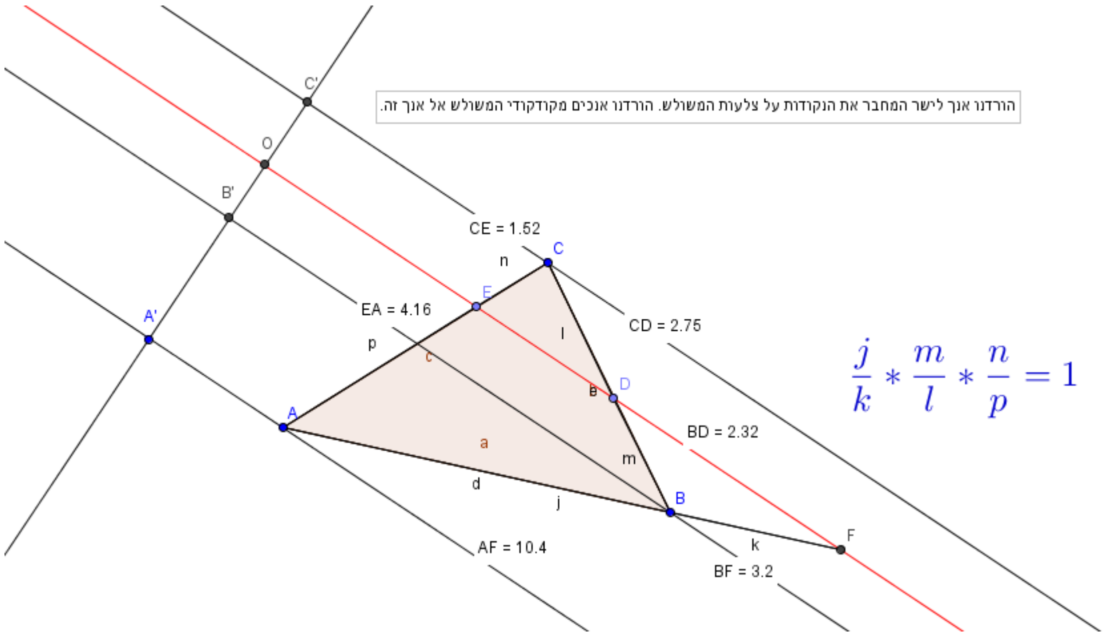
תנאי הכרחי ומספיק לכך ששלוש נקודות הנמצאות על צלעות המשולש או על המשכיהן יהיו על ישר אחד הוא בסימוני השרטוט למטה ש:

$$\frac{EC}{AE}\cdot\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AF}{BF}=1$$

בסימון קטעים:




הוכחת כיוון ראשון:




נוריד אנך לישר המחבר את הנקודות על צלעות המשולש. נוריד אנכים מקודקודי המשולש לאנך זה ואנך מאחת הנקודות שעל הישר (היטלי שתי הנקודות האחרות יתלכדו איתו – ראה שרטוט)

לפי משפט תאלס נקבל:

$$\frac{EC}{AE} = \frac{OC'}{A'O}$$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{B'O}{OC'}$$

$$\frac{AF}{BF}=\frac{A'O}{B'O}$$

וברור למה שווה מכפלת אגפי ימין של המשוואות!!

# שאלות לדיון ולהרחבה:

1. באיזה שלב בהוראה ובאיזה נושא אפשר לשלב את הפעילות?
2. מה הערך המוסף של פעילות זו ?

נקודות למנחה:

כדאי להדגיש את החשיבות של ראיה אינטגרטיבית בין נושאים: ראיית משפטים שלכאורה בלתי קשורים מתלכדים למשפט אחד רחב יותר, או בכיוון הפוך: ראייתם כמקרה פרטי של אותו משפט.

ראיה תהליכית: מן הכלל אל הפרט

קישור להסטוריה של המתמטיקה

הדגשת האסטטיקה בתהליך

הפעילות מזמנת אפשרות לתרגול מיומנויות הוכחה אבל בשילוב "ערך מוסף"

## קישורים הרחבות ומקורות

יישום דינמי - מפגש חוצי הזויות במשולש

הקישור הוא אל:

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי/מאגר יישומים דינמיים/משולשים/מפגש חוצי זוויות

משפט צ'בה בגירסאות שונות (קישור לויקיפדיה – הערך "משפט צ'בה")

מאמר בעל"ה המרחיב את היריעה בנושא משפט צ'בה (קישור למאמרן של עטרה שריקי, קלרה זיסקין, אילנה לביא בעל"ה 38 , 2007)