



מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5
יח"ל

פינה חמה הפתעות מתמטית

אילאיל בורדה ופאינה פרצב

מבוסס על הספר "אחד שווה אפס" מאת ניצה מובשוביץ-הדר וג'ון ווב



הפתעה ראשונה:

בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי $1=2$!!

כידוע $2+2=2^2$, $3+3+3=3^2$, $4+4+4+4=4^2$ וכן הלאה

ובאופן כללי: $x^2 = x+x+\dots+x$ (עם x איברים באגף שמאל של המשוואה)

נגזור את שני צידי הביטוי האחרון ונקבל:

$$2x = 1+1+\dots+1$$

היות ויש x פעמים 1 באגף השמאלי של המשוואה אנו מסיקים ש –

$$x=2x$$

$$1=2$$

ומכאן:

$$!?!?!?$$

הפתעה שניה:

מי צודק???

יובל, גליה ואורן מנסים לגזור את x^x , $x > 0$

יובל משתמש בכלל: $(x^n)' = nx^{n-1}$

ומקבל את התשובה: $(x^x)' = x \cdot x^{x-1} = x$

גליה משתמשת בכלל $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

ומקבלת את התשובה: $(x^x)' = \ln x \cdot x^x$

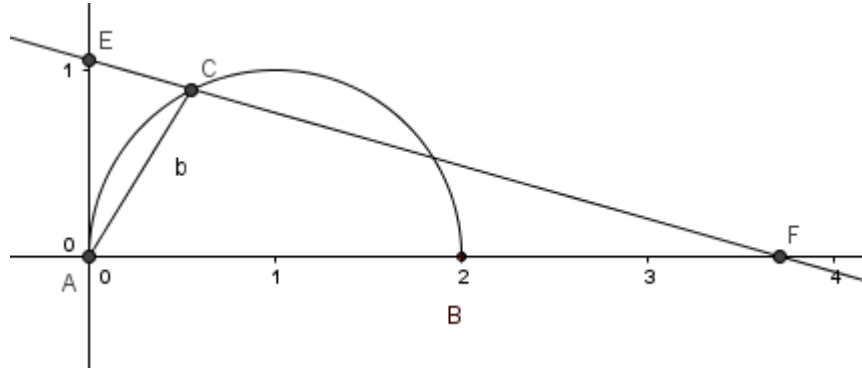
אורן לא יודע כיצד לפתור את הבעיה, לכן הוא פשוט מחבר את תשובות שני חבריו ומקבל:

$$(x^x)' = x + \ln x \cdot x^x$$

מי משלושת החברים צודק???

הפתעה שלישית:

הפתעה בגבול!



בשרטוט למעלה חצי מעגל בעל רדיוס 1, כך שהנקודה A היא ראשית הצירים והנקודה B על ציר ה x. AC מיתר, והנקודה E נמצאת על ציר ה y כך ש:

$$AC=AE=b < 2$$

הנקודה F היא חיתוך הישר EC עם ציר ה x.

מה לדעתכם יקרה למיקומה של הנקודה F כאשר הנקודה C מתקרבת ל A, כלומר כאשר b שואף לאפס?

שערו קודם כל אינטואיטיבית, רק אחר כך אתם מוזמנים להיעזר ביישום:

[יישום להפתעה בגבול.ggb](#)

נסו להסביר מה אתם רואים ומדוע?

מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

פתרונות (שיקלו את הפתעה....)

להפתעה הראשונה: $2=1$???

נתחיל מכך שהמשוואה $x^2 = x + x + \dots + x = x$ (כאשר יש x איברים במשוואה) נכונה רק עבור x טבעי.

ואז???

האם כאשר x יהיה מספר טבעי נקבל $2=1$???
כאן אנחנו עוברים למהות הנגזרת. כדי לגזור פונקציה בנקודה, היא צריכה להיות מוגדרת גם בסביבת אותה נקודה. אם x טבעי (בדרך כלל אנחנו מייצגים אותו בעזרת האות n) הוא אינו מוגדר בסביבת שום ערך שלו שנבחר ולכן אין משמעות לפעולת הגזירה כאן.

יש לשים לב שיש כאן פגם נוסף:
הכלל שנגזרת סכום היא סכום הנגזרות של הפונקציות המחוברות אותה תקף רק כאשר מדובר במספר קבוע של פונקציות אותן מחברים, ולא כאשר מספר הפונקציות בסכום הוא בעצמו משתנה.

החלטה: מי צודק?? (הפתעה שניה):

כדי להשתמש בכלל $(x^n)' = nx^{n-1}$ n חייב להיות קבוע

כדי להשתמש בכלל $(ax)' = ax \ln a$ a חייב להיות קבוע

לכן עלינו לאכזב את יובל וגליה.

ומה לגבי אורן??

הפלא ופלא: דוקא התוצאה שאורן קיבל נכונה!

הכיצד??

במקרה שלנו לא הבסיס ולא המעריך קבועים ואין לנו אפשרות להשתמש באף אחד מן הכללים הקודמים. לכן יש הכרח לגייס כלים אחרים.

נתון:

$$x > 0, y = x^x$$

נציא \ln לשני אגפי המשוואה ונקבל: $\ln y = \ln x^x = x \cdot \ln x$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \quad \text{נקבל:}$$

$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

וקיבלנו את תשובתו של אורן.

מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

הרחבה עבורנו המורים:

האם אורן היה סתם בר מזל??

אנחנו במצב בו

$$Y = u(x)^{v(x)}$$

$$u(x) = x \text{ וגם } v(x) = x$$

כלל הגזירה במקרה זה הוא כלל השרשרת לפונקציה מורכבת בעלת שני משתנים,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

או בכתוב מקובל בתיכון:

$$Y'(u) \cdot u'(x) + y'(v) \cdot v'(x)$$

במחבר הראשון מתייחסים לבסיס כמשתנה (פונקציה חזקה) מוכפלת בנגזרת פנימית של 1 ובמחבר השני מתייחסים למעריך כמשתנה (פונקציה מעריכית) מוכפלת בנגזרת פנימית של 1. זה בעצם מה שאורן עשה....

ומה לגבי הגבול ??? (הפתעה שלישיית):

$$\angle ACB = 90^\circ \text{ היקפית על קוטר}$$

$$\angle AEC = \angle ACE \text{ זוויות במשולש שווה שוקיים}$$

$$\angle AFE = 90^\circ - \angle AEC \text{ זוויות במשולש } AEF$$

$$\angle BCF = 90^\circ - \angle ACE$$

מכאן

$$\angle BCF = \angle AFE$$

ומכאן:

$$BC = BF$$

כאשר הנקודה C מתקרבת ל A אז CB שואף ל AB שאורכו R ולכן AF ישאף ל 2R בלבד ולא ילך ויתרחק כפי שהאינטואיציה של רבים אומרת. (ביישומון רואים בבירור כי F הולכת ו"מתייצבת" על 6 כאשר הרדיוס 3)