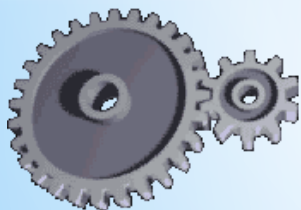


מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

פתרון שאלות מילוליות



בדרכים שונות



קיימים שני סוגים של שאלות מילוליות

*** שאלות אריתמטיות**

שאלות בהן הייצוג המנטאלי של הסיטואציה מגדיר את הפעולות שיש לבצע, כלומר ניסוח השאלה מוביל לפתרון.

למשל:

ליוסי 7 גולות. יוסי איבד 4 גולות. כמה גולות נשארו לו?

*** שאלות אלגבריות**

שאלות בהן הייצוג המנטאלי של הסיטואציה אינו מגדיר את הפעולות שיש לבצע.

למשל:

שחר מבוגר מ-4 שנים. בעוד שנתיים, סכום גילאיהם יהיה 50. בן כמה כל אחד מהם?

קשיים בהוראת שאלות מילוליות

- * התלמיד אינו רואה במשוואה כלי אינטואיטיבי לפתרון השאלה.
- * כתיבת משוואה נוגדת את האינטואיציה ומצריכה חשיבה "הפוכה"
- * קושי קוגניטיבי של תרגום השאלה המילולית לשפה המתמטית
(יכולת ניתוח, הכללה, קישור ושילוב של מושגים)
- * במעבר מההצגה המילולית לסימבולית, נדרש מהתלמיד:
 1. לבחור נעלם
 2. לרשום ביטויים סימבוליים לתיאור השאלה
 3. לקשר בין הביטויים הסימבוליים בשוויון או אי שוויון

בעיית הנזיר

נזיר יצא מכפרו בשעה 8:00 בבוקר וצעד בשביל המוליך אל המנזר הנמצא על פסגת ההר.

למחרת בשעה 8:00 בבוקר יצא הנזיר מהמנזר וירד אל הכפר לאורך אותו שביל. הוא עצר למנוחת צהריים במעיין, לאחר מכן המשיך והגיע לביתו בכפר.

האם בשני הימים היה מקום שאליו הגיע הנזיר בדיוק באותה שעה גם בעליה וגם בירידה?

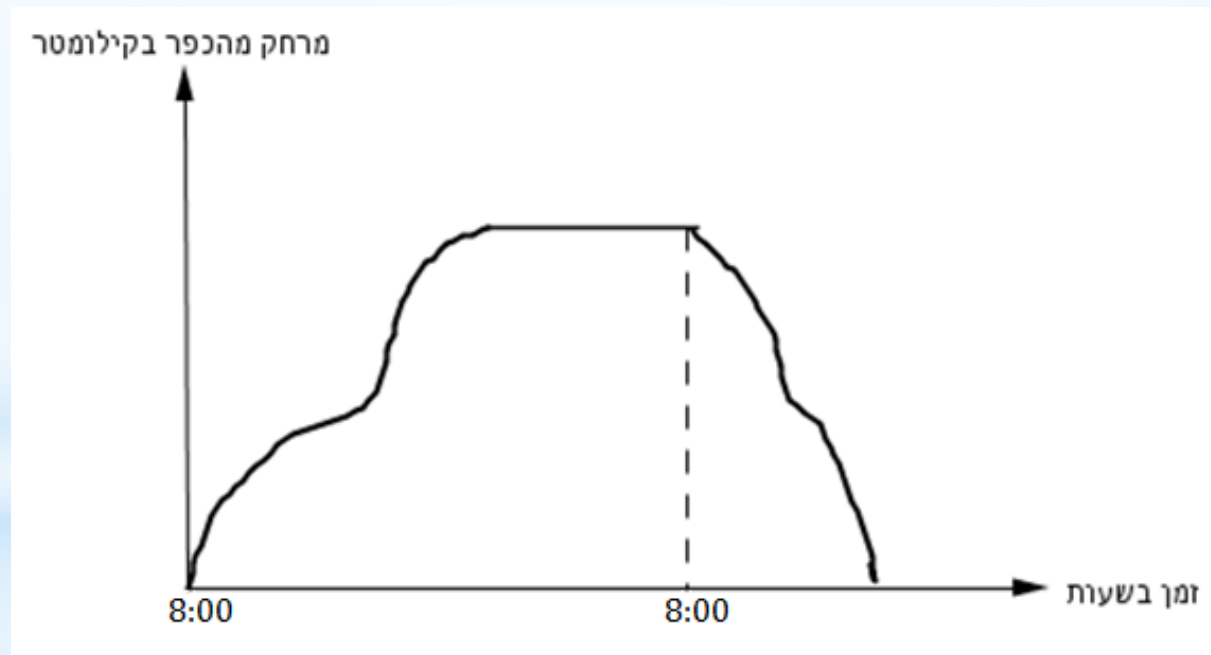


השאלה שאלה איכותנית

בלומר: איך נתונים מספריים

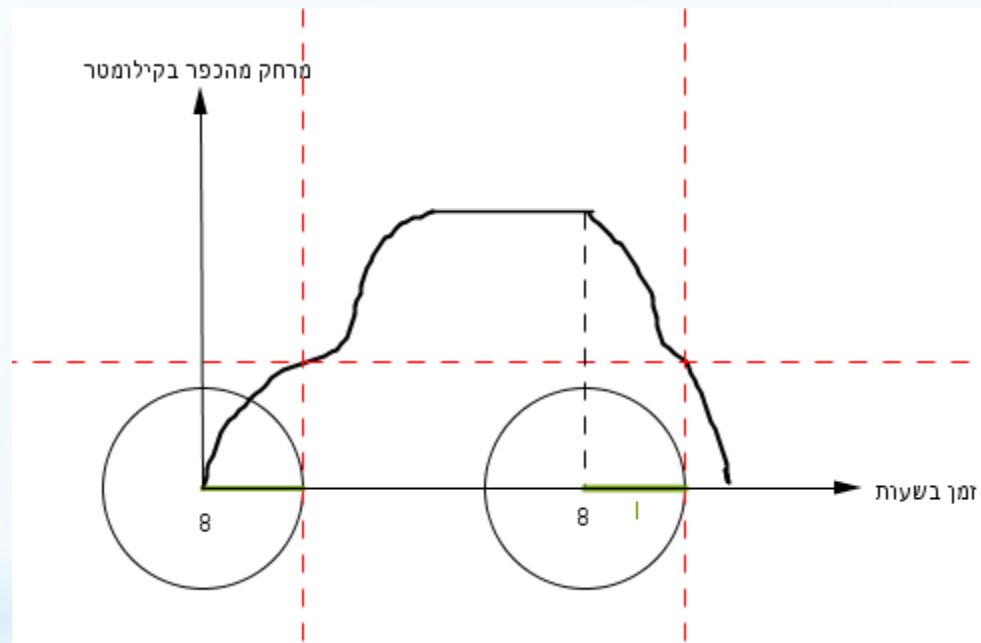
* פתרון אלגברי- לא רלוונטי כאן.

* אז מה התשובה? פתרון ויזואלי-גרפי:

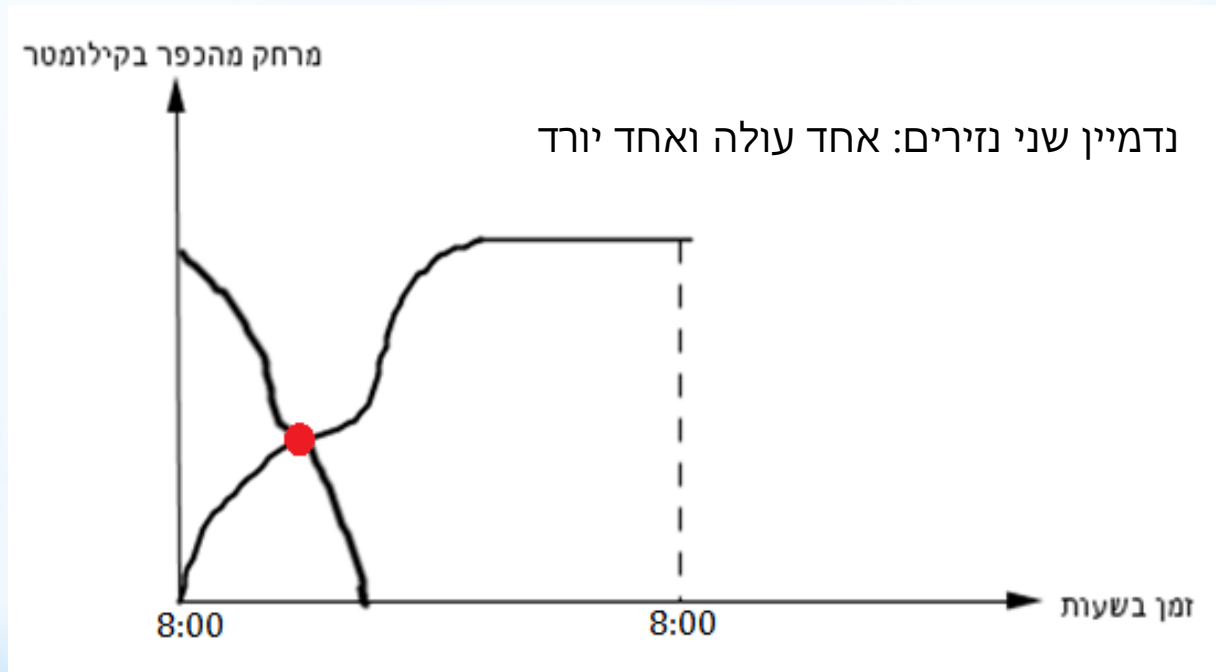


איך נעזר בשרטוט המתאר את השאלה ?

אפשרות אחת לפתרון:



דרך נוספת לפתרון:



מתוך "שאלות מילוליות במשתנה אחד", שוש גלעד, הוצאת מט"ח 2000



בציית הספד

(בחינת בגרות קיץ תשע"ו, מועד ב')

שני טכנאים גל ודן עבדו בהרכבת מחשבים.

קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.

באחד הימים, הרכיבו הטכנאים אותו מספר של מחשבים.

גל התחיל לעבוד בשעה 8:00 וסיים בשעה 15:00.

דן התחיל את עבודתו לאחר השעה 8:00 ולפני השעה

9:00 וסיים לעבוד בשעה 13:00.

באותו יום, מתחילת עבודתם, עד השעה 9:00 גל ודן

הרכיבו את אותו מספר מחשבים.

כמה זמן אחרי השעה 8:00 דן התחיל את עבודתו?

פתרון חישובי

אחרי השעה 9:00

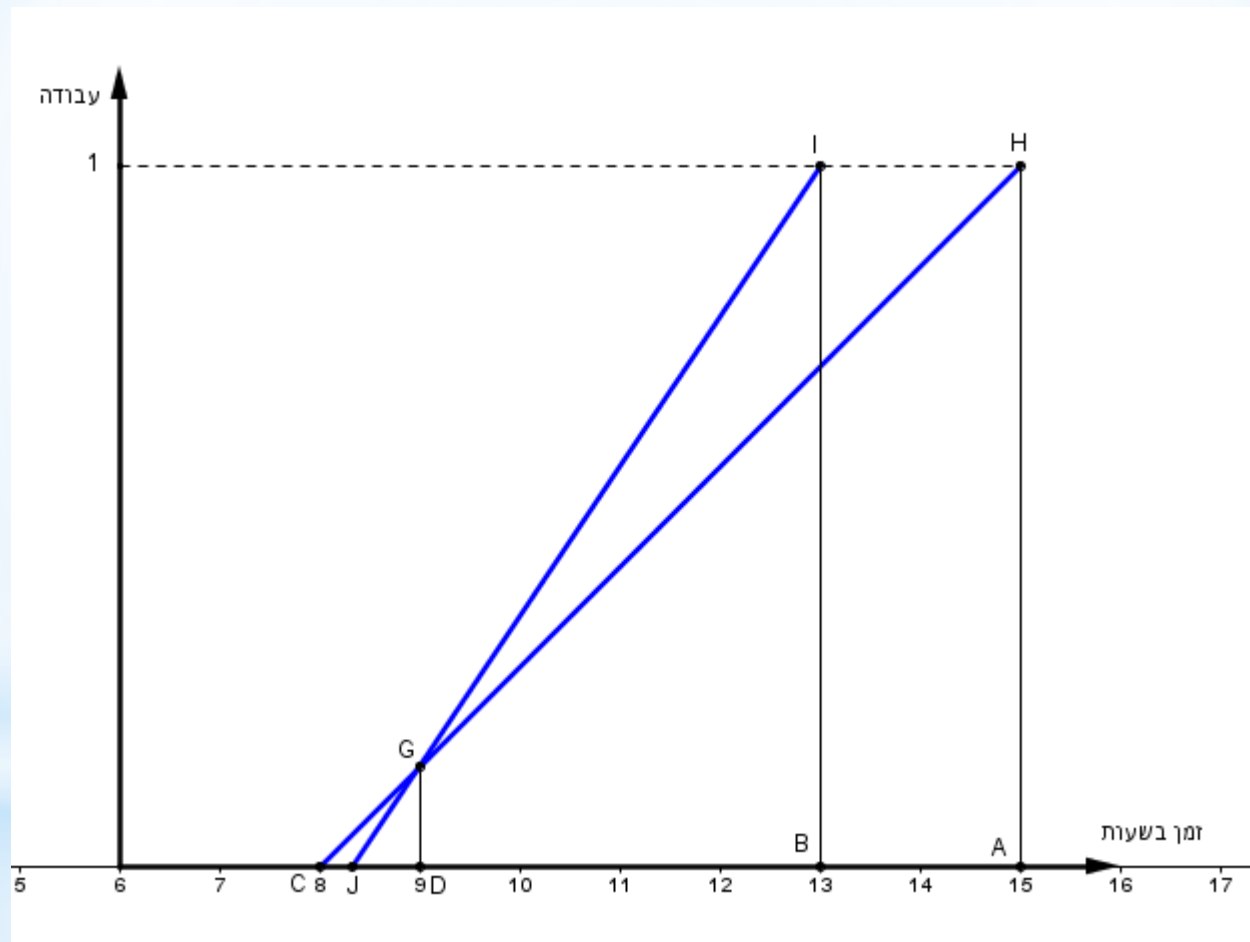
עבודה	זמן בשעות	הספק לשעה	
$6x$	6	x	גל
$6x$	4	$1.5x$	דן

לפני השעה 9:00

עבודה	זמן בשעות	הספק לשעה	
x	1	x	גל
x	$2/3$	$1.5x$	דן

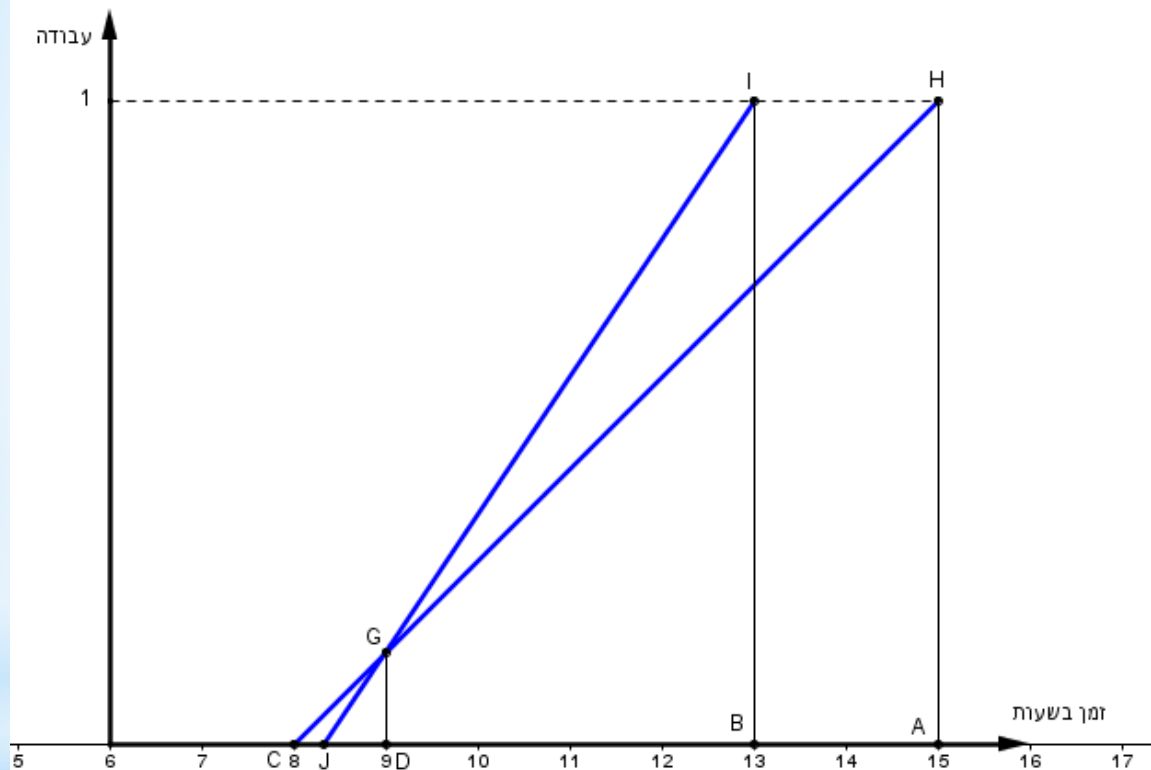
לכן דן החל את עבודתו 20 דקות אחרי השעה 8:00

פתרון בגיאומטריה אנליטית



מה אורך הקטע CJ?

פתרון בעזרת דמיון משולשים



מחישובי פרופורציות נמצא: $DJ = \frac{2}{3}$

$$\triangle HAC \sim \triangle GDC$$

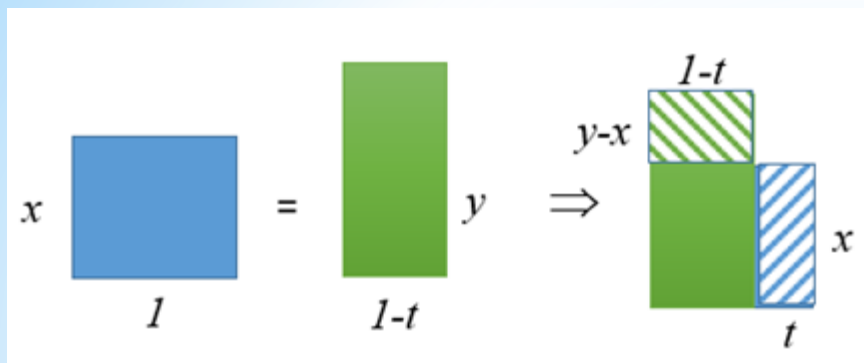
$$\triangle JGD \sim \triangle JIB$$

פתרון בעזרת שטחים

נסמן:

- * t - זמן בשעות אחרי שעה 8:00 בו התחיל דן לעבוד.
- * x - הספק של גל לשעה
- * y - הספק של דן לשעה
- * מתנאי השאלה ברור: $x < y$

לפני השעה 9:00



$$(1-t)(y-x) = xt$$

$\Downarrow$

$$\frac{x}{y} = 1-t$$

אחרי השעה 9:00



$$4(y-x) = 2x$$

$\Downarrow$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

נשווה בין המשוואות ונקבל $t = \frac{1}{3}$

שאלה 1

שתי רכבות יצאו בו זמנית.

האחת מעיר א' לעיר ב',

והשנייה מעיר ב' לעיר א'.

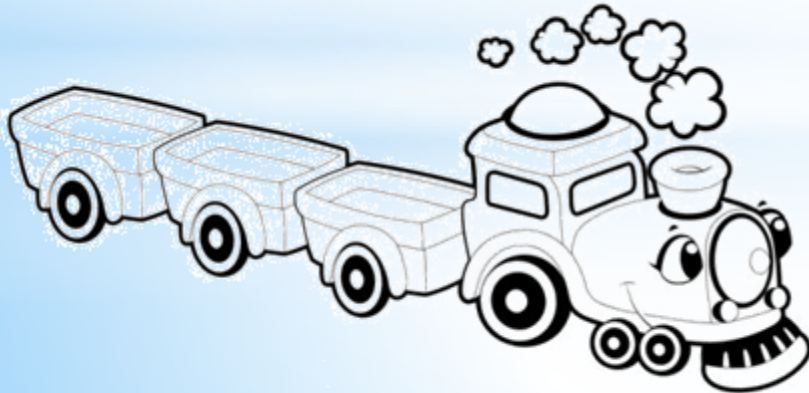
עד הפגישה, עברה הרכבת שיצאה מעיר ב' 100 ק"מ יותר מהרכבת שיצאה מעיר א'.

הרכבת הראשונה הגיעה לעיר א' ב-9 שעות לאחר הפגישה.

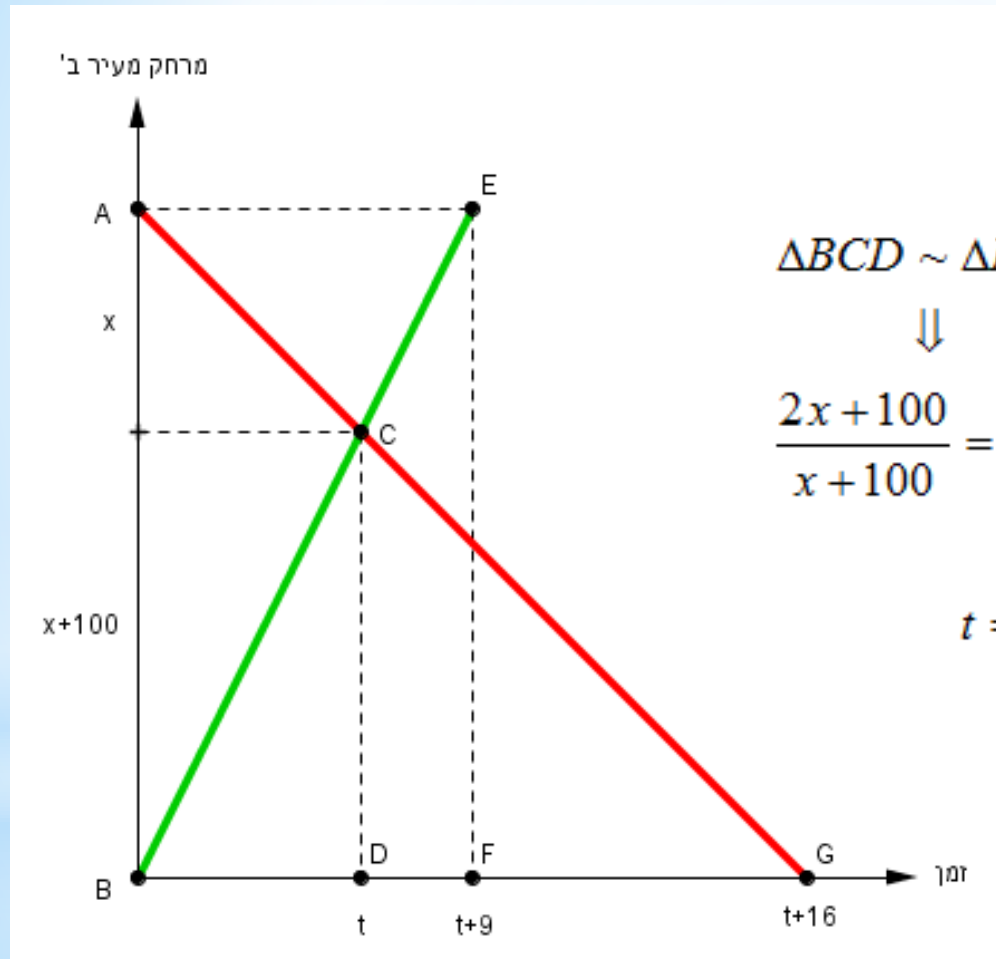
השנייה הגיעה לעיר ב', 16 שעות לאחר הפגישה.

מהירות הרכבות לא השתנו במשך כל הדרך.

מה המרחק בין שתי הערים?



פתרונו בעזרת דמיון משולשים



$$\triangle BCD \sim \triangle BEF$$



$$\frac{2x+100}{x+100} = \frac{t+9}{t}$$

$$t = 12$$

$$\triangle ABG \sim \triangle CDG$$

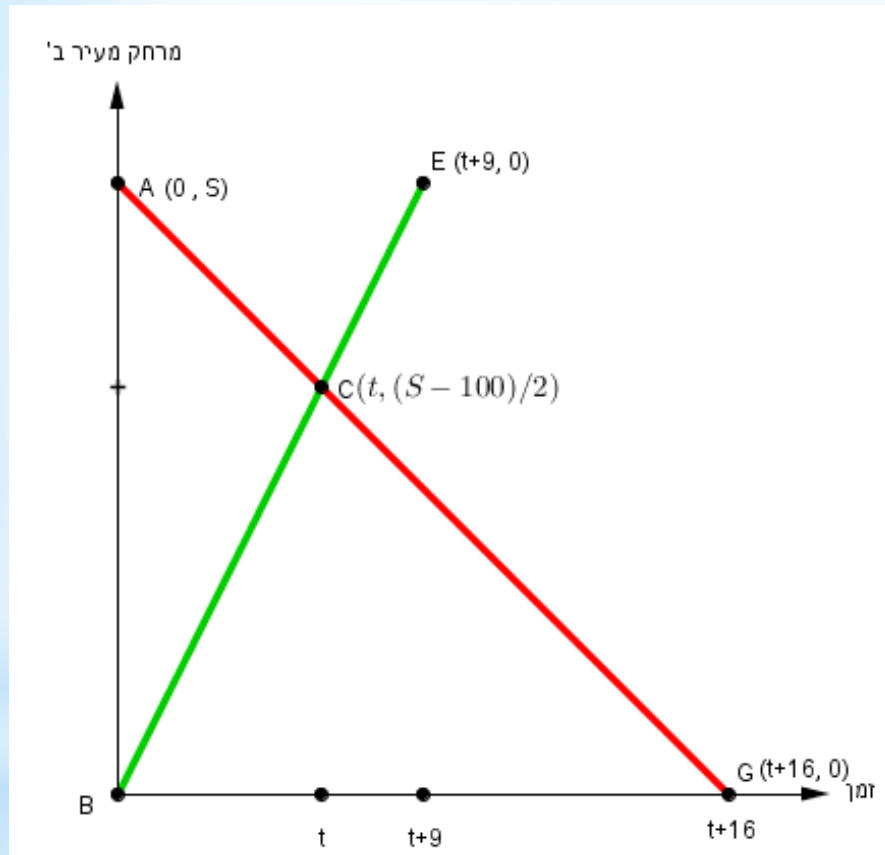


$$\frac{2x+100}{x+100} = \frac{t+16}{16}$$



$$x = 300$$

פתרון בעזרת שיפועי ישרים



נשווה בין שיפועי ישרים,
ונקבל שתי משוואות בשני נעלמים

$$m_{EB} = m_{CB}$$

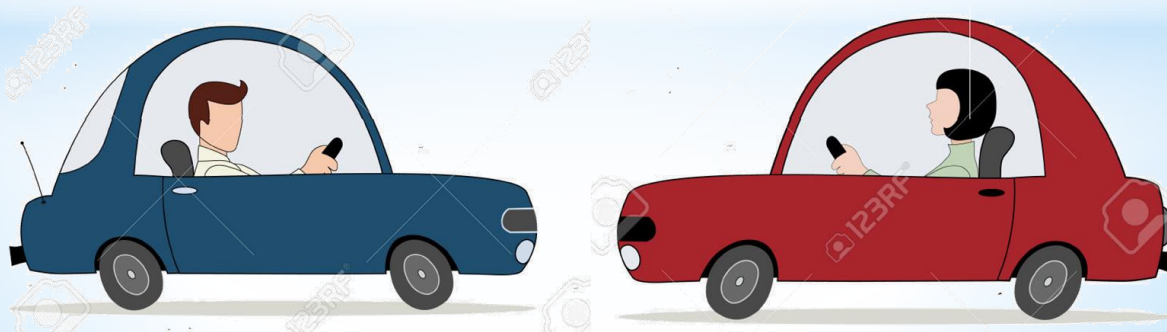
$$m_{AG} = m_{AC}$$

שאלה 2

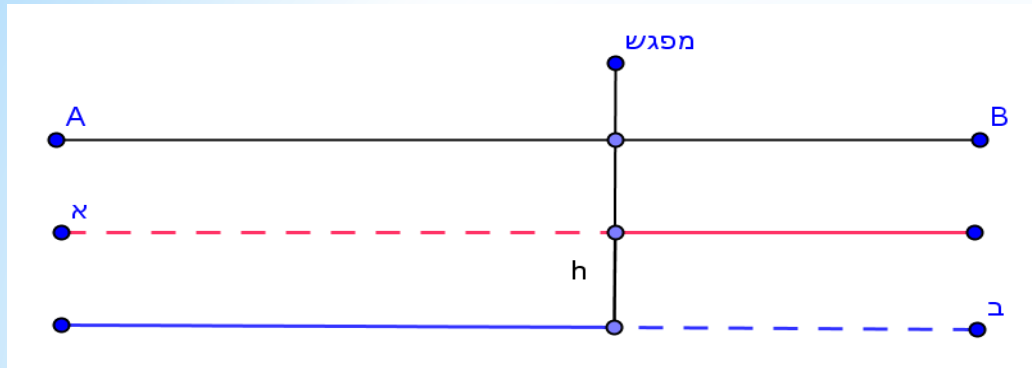
משני מקומות A ו-B, שהמרחק ביניהם 800 ק"מ, יצאו שתי מכוניות זו לקראת זו.

מכונית אחת יצאה מ-A בשעה 6:00, והמכונית האחרת יצאה מ-B בשעה 7:00.

שתי המכוניות נפגשו באמצע הדרך בין A ל-B. מהירות המכונית שיצאה מ-A קטנה ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית שיצאה מ-B. מצא את המהירות של המכונית שיצאה מ-A.



פתרונו אלגברי



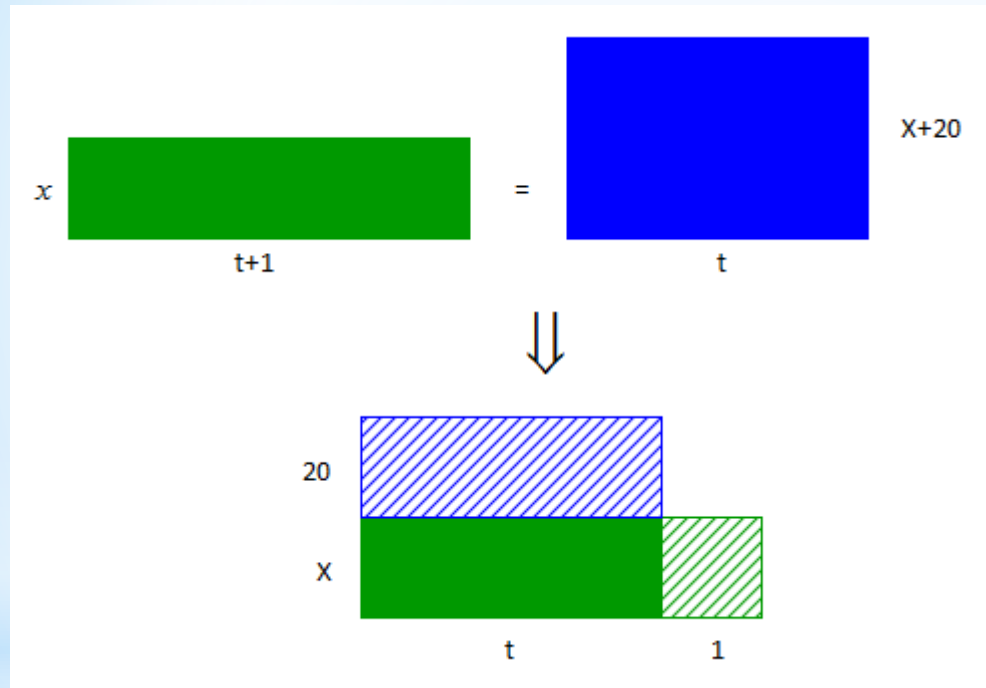
מכונית	מהירות	זמן	דרך
מ-A ל-B	v	$\frac{400}{v}$	400
מ-B ל-A	$v + 20$	$\frac{400}{v + 20}$	400

$$\frac{400}{v} = \frac{400}{v+20} + 1 \quad \text{נקבל משוואה}$$

כשנפתור נקבל שני פתרונות, אחד אינו בתחום המתאים והשני $v = 80$

תשובה : מהירות המכונית שיצאה מ-A ל-B היא 80 קמ"ש

פתרון בעזרת שטחים



כל שטח שווה ל-400 ק"מ, לכן:

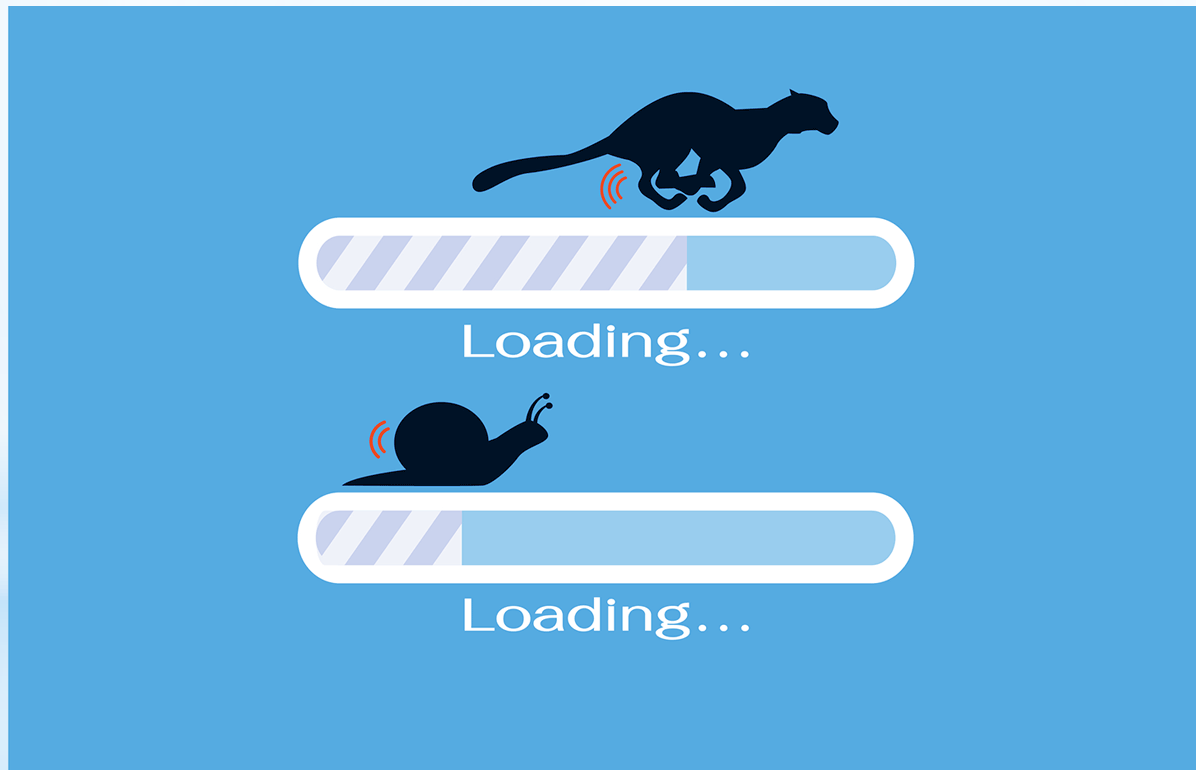
$$\begin{cases} x = 20t \\ x(t+1) = 400 \end{cases}$$

$\Downarrow$

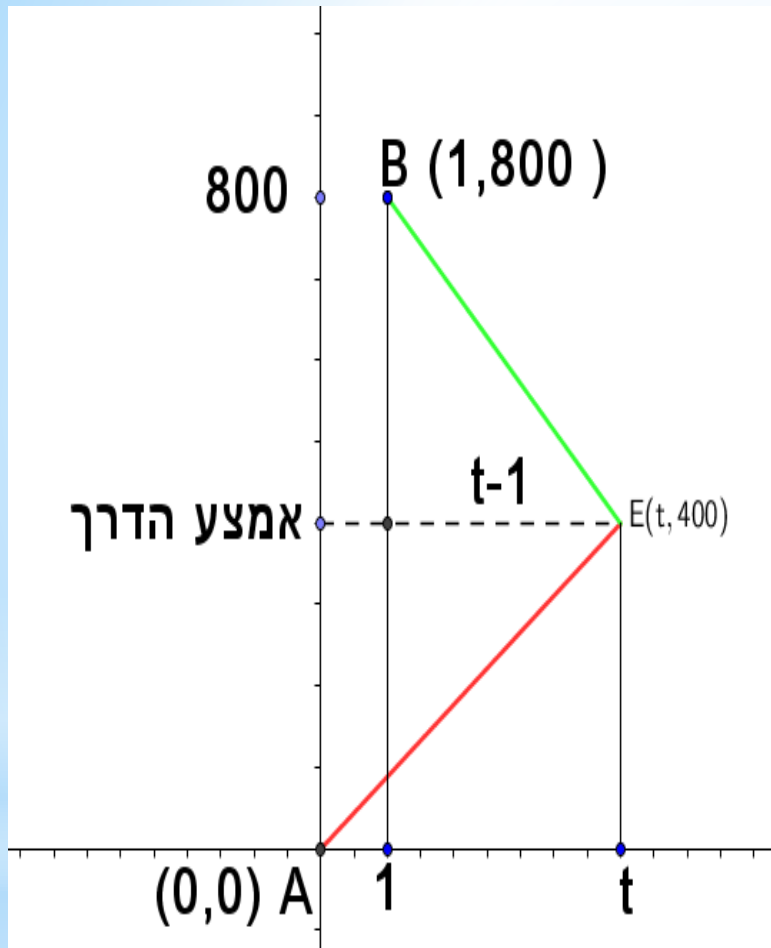
$$t = 4, \quad t = -5$$

$$x = 80$$

ידוע ש- $V \equiv \frac{\Delta S}{\Delta T}$
נתייחס למהירות כשיפוע ישר



פתרו המסתמר על בר שמהירות שיפוע ישר



מהירות המכונית שיצאה מ-A קטנה ב-20 קמ"ש
ממהירות המכונית שיצאה מ-B.

(אפשר להתייחס לשיפועים גם כטנגנס של זוויות
רלוונטיות)

מהשוואת השיפועים נקבל:

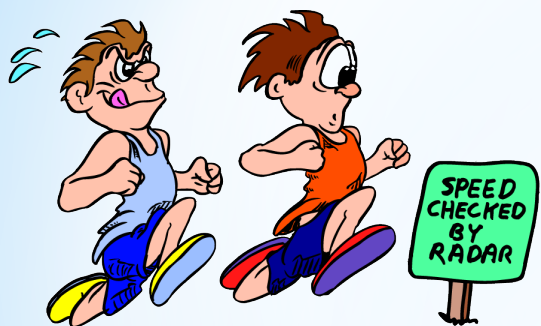
$$\frac{400}{t} + 20 = \frac{400}{t-1}$$

הפתרונות הם: $t = 5$ וגם $t = -4$ שנפסל

ולכן מהירות המכונית שיצאה מ-A היא $\frac{400}{5}$

$80 =$ קמ"ש.

בגרות קיץ 2014 , מועד ב'



רץ א ורץ ב יצאו באותו רגע מאותו מקום.

הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.

המהירות של הרץ ה- א הייתה 6 קמ"ש

ומהירות של הרץ השני הייתה 7.5 קמ"ש.

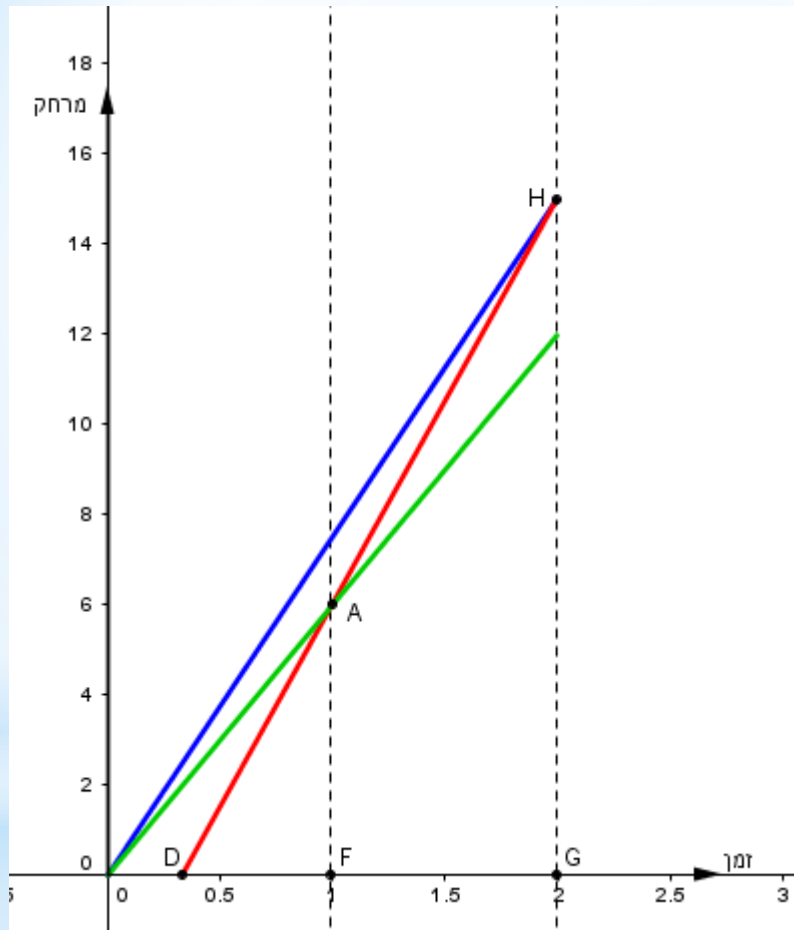
כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים, יצא רץ ב מאותו מקום

ובאותו כיוון. הוא רץ במהירות קבועה.

רץ ב פגש בדרך את הרץ ה- א ושעה אחר כך הוא פגש את הרץ ה-א.

מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ ב עד לפגישתו עם רץ א.

פתרונו בעזרת דמיון משולשים



$$DF = t$$

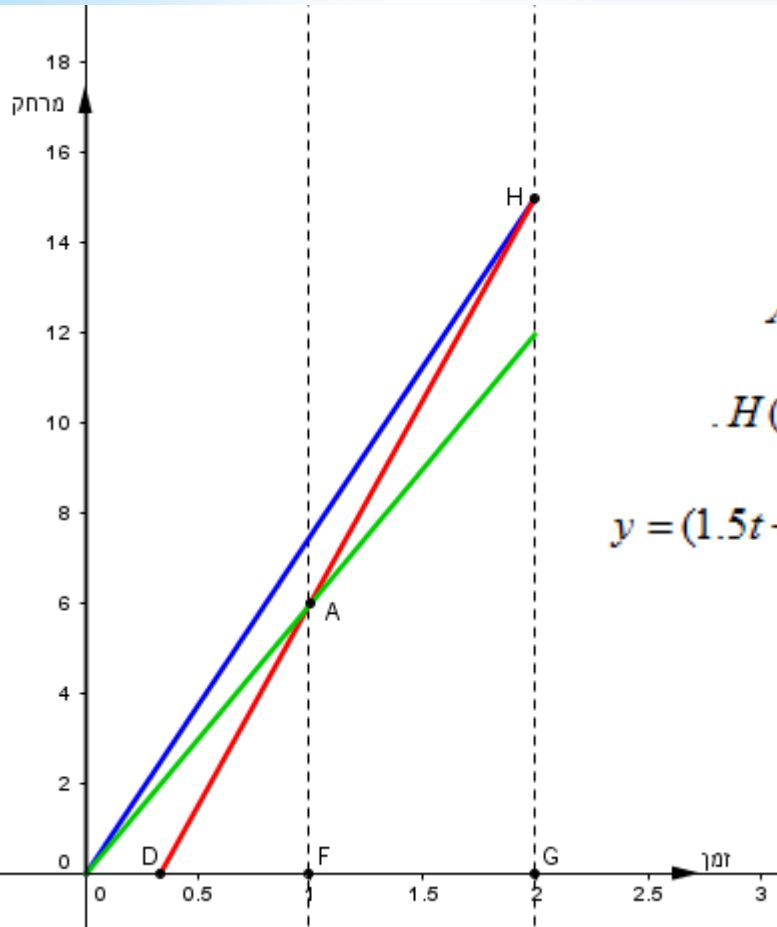
$$\triangle DFA \sim \triangle DGH$$

$$\frac{t}{t+1} = \frac{6t+2}{7.5t+10}$$

$$t = \frac{2}{3} \quad t = -2$$

לכן עברו שעה וארבעים דקות מיציאת הרץ השלישי עד לפגישתו עם הרץ השני.

פתרון באמצעות גיאומטריה אנליטית



את הרץ הראשון מייצג הישר $y = 6x$

את הרץ השני מייצג הישר $y = 7.5x$

לכן הנקודה המייצגת את פגישת רץ 1 עם רץ 3 תהיה $A(t, 6t)$

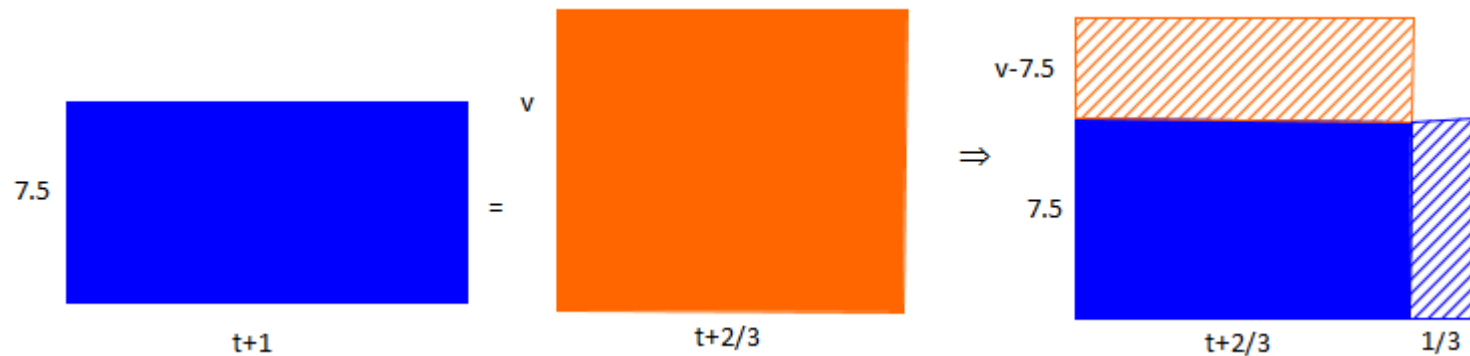
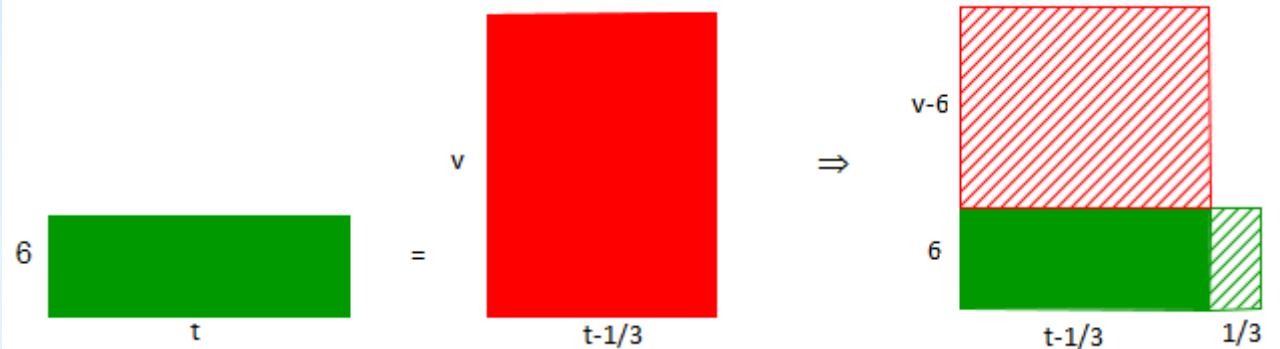
ונקודה H מייצגת את פגישת רץ 2 עם רץ 3 $H(t+1, 7.5t+7.5)$

משוואת AH מייצגת את הרץ השלישי $y = (1.5t + 7.5)x - 1.5t^2 - 1.5t$

תחתוך את ציר ה-x בנקודה $D(\frac{1}{3}, 0)$

לכן נקבל $t = 1$ ותשובה נוספת לא רלוונטית לשאלה.

פתרון בעזרת שטחים



$$\begin{cases} (v - 6)\left(t - \frac{1}{3}\right) = 2 \\ \left(t + \frac{2}{3}\right)(v - 7.5) = 2.5 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \quad t = -\frac{5}{3}$$

בגרות קיץ תשע"ו - מועד א'

שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א' לעיר ב'.

המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק"מ.

המכונית הראשונה נסעה במהירות הגדולה ב־ 25 קמ"ש מהמהירות של המכונית השנייה.

כעבור 1.5 שעות מרגע היציאה מעיר א', הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה

לחצי ממהירותה הקודמת, והגיעה לעיר ב' $\frac{1}{2}$ שעה אחרי המכונית השנייה.

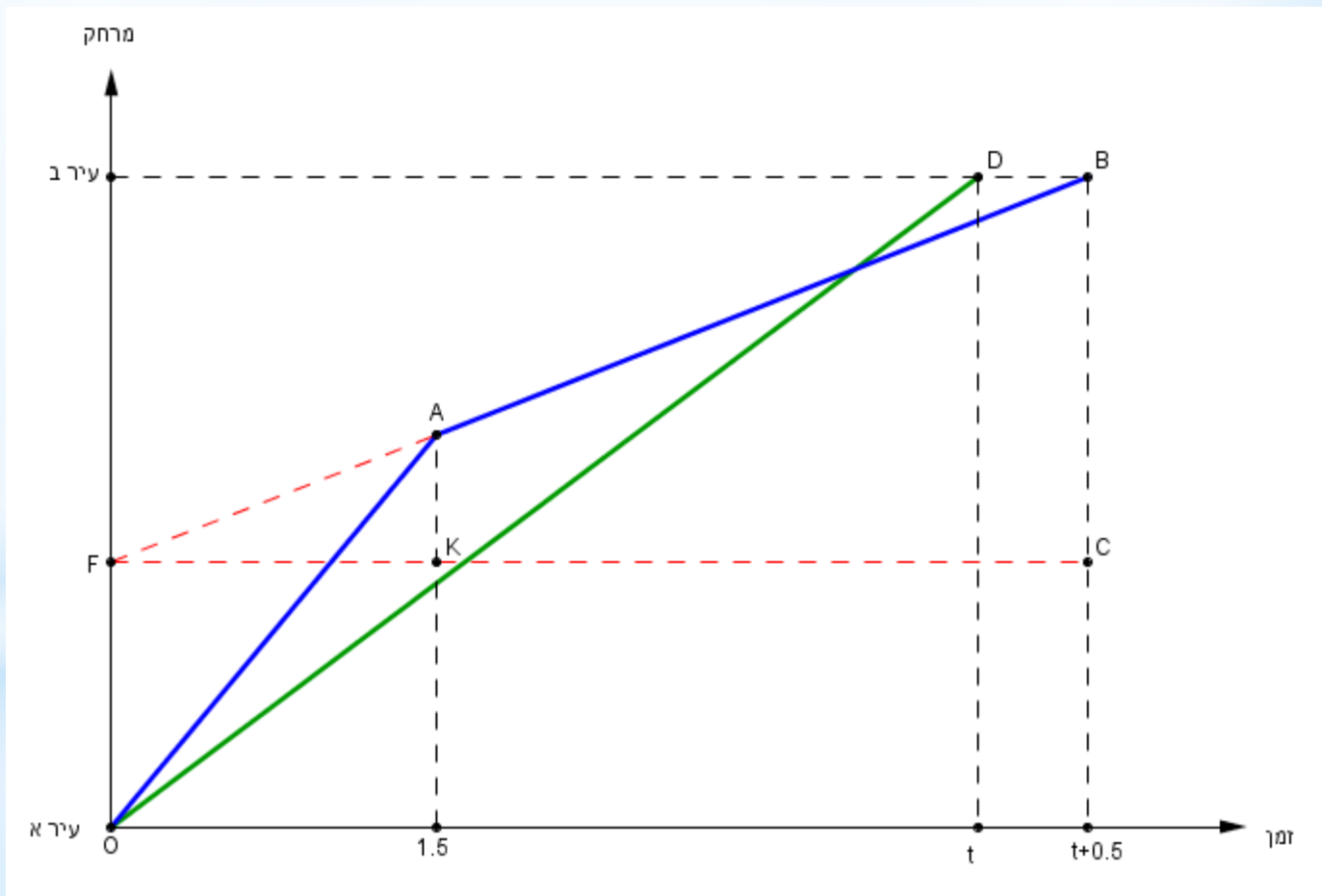
א. מצא את המהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ־ 60 קמ"ש.

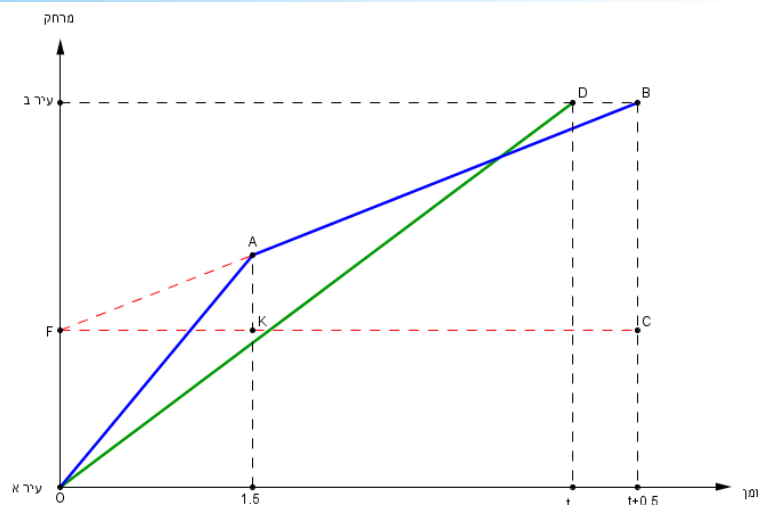
ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע היציאה מעיר א' ולפני שהמכונית השנייה השיגה את

המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק"מ

(מצא את שתי האפשרויות).

גיאומטריה אנליטית ודמיון





v - מהירות המכונית השנייה.

t - זמן הגעה של המכונית השנייה לעיר ב'.

משוואת ישר OD המייצג את המכונית השנייה $y = vx$.

משוואת הישר OA המייצג את המכונית הראשונה עד ההאטה $y = (v + 25)x$.

משוואת הישר BA המייצג את המכונית הראשונה אחרי ההאטה $y = \left(\frac{v + 25}{2}\right)x + 18.75 + 0.75v$.

(שיפוע ברור, והצבת נקודה $B(t + 0.5, 300)$ הנמצאת על הישר).

$$(1) \quad t = \frac{300}{v}$$

מישר מכונית שנייה ברור שמתקיים

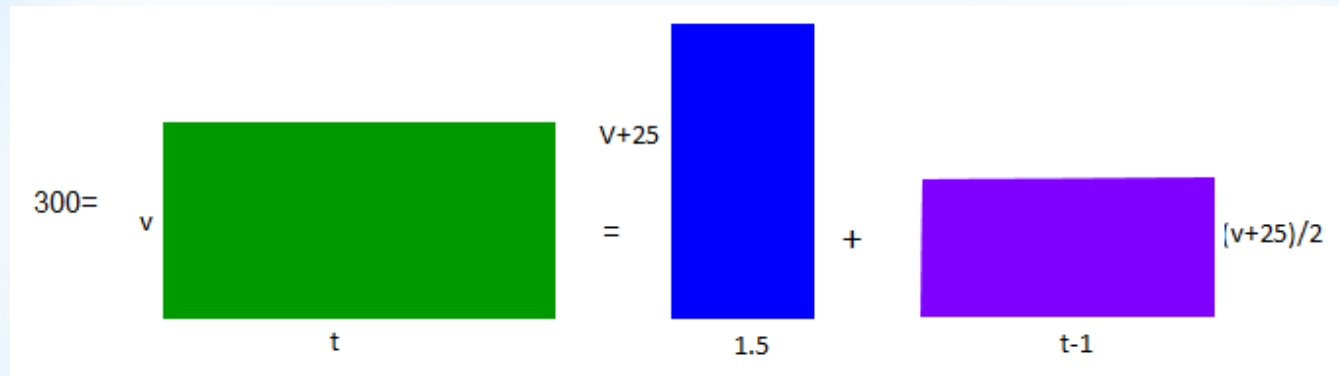
למכונית הראשונה, נשתמש בדמיון משולשים: $\Delta FKA \sim \Delta FCB$

$$(2) \quad \frac{300 - 18.75 - 0.75v}{t + 0.25} = \frac{1.5v + 37.5 - 18.75 - 0.75v}{1.5}$$

$$v_{1,2} = 50, 75$$

ממשוואות (1) ו-(2) נקבל $t = 4$

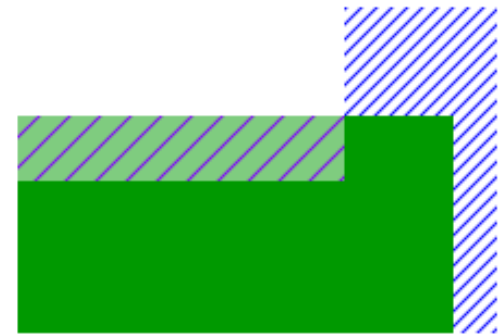
פתרונו בעזרת שטחים



השטח המקווקו הכחול שווה לשטח הסגול ירוק

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(v+25) + 25 = \left(v - \frac{v+25}{2}\right)(t-1) \\ vt = 300 \end{cases}$$

$$v_{1,2} = 50, 75 \quad t = 4$$



לקריאה נוספת:

מאמר בעל"ה 51, מרץ 2015

"פתרונות שונים לבעיות הספק באמצעים גרפיים",

אביטל אלבוים-כהן ג'ייסון קופר