

# תנועה בדרכים שונות

פתרון שאלות תנועה בדרכים שונות

מזל אלטחן, תמי ויינרובסקי, יוליה מורשטיין,

ניצה בן יואש

מועדון ה-5 קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל



## מבוא

מטרת הוראת הפרק של שאלות מילוליות היא לפתח אוריינות מתמטית ולהדגים לתלמיד את השימושיות של המתמטיקה בחיי יום-יום ולהקנות לתלמיד כלים לפתור שאלות יום-יום באמצעות מתמטיקה בדרכים שונות. בסדנה זו נדגים מגוון רחב של כלים לפתרון בעיות מילוליות בייצוגים שונים.

אוריינות מתמטית היא יכולתו של הפרט לזהות ולהבין את התפקיד של המתמטיקה בעולם, לבצע שיקולים מבוססים היטב, להשתמש ולעסוק במתמטיקה בדרכים ובאופנים המתאימים לחיי הפרט של אזרח מודע, אחראי, מועיל, ובעל יכולת התבוננות ותגובה על הנעשה סביבו.  
De Lange et al., PISA, 2006

## בעיות מילוליות

מבחינה היסטורית, הספרות המתמטית בעת העתיקה לימדה עקרונות מתמטיים כלליים בעיקר באמצעות פתרון שאלות מילוליות. אחת השאלות המפורסמת ביותר היא השאלה החרוטה על מצבה של דיופנטוס (המכונה בשם "אבי האלגברה" בזכות ספרו "אריתמטיקה") העוסקת בעיקר במשוואות דיופנטיות - מערכת משוואות אשר מספר הנעלמים בהן גדול ממספר המשוואות ופתרונותיהם הם מספרים שלמים בלבד:

כאן ישן דיופנטוס לצד את שנתו.  
רק ששית אחייו נמשכה ילדותו.  
צוד חיייו-חלקי-שתיים-עשרה - 43 לו לקן:  
צוד שביצית אחייו - והנה הוא חתן.

צוד חמש שנות חייט - ונולד לו הין:  
חי פי שניט פחות מאכיו, האסכני!  
הלדקן החכט בארבע שנות השכול  
אחרי מות הין - וירד אל השאול.

צופר-ארח! כפדהו לפי תורתו  
חשפ: הן כמה הוא היה פמותו?

(פתרון: נסמן את גילו של דיופנטוס בזמן מותו ב x ונקבל את המשוואה :

שפתרונה הוא 84.)

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

בשנים האחרונות, עם המגמה לטיפוח אוריינות מתמטית ופיתוח חשיבה מתמטית, התפתח הצורך לחשוף את התלמידים, לדרכים שונות לפתרון שאלות מילוליות. הכוונה היא להראות דרכים המבוססות על ידע גיאומטרי, ידע על התנהגות גרפים ופונקציות וגם אסטרטגיות לארגון המידע בתרשימים שונים.

הסדנה שלנו עוסקת בפתרון שאלות תנועה במספר דרכים שונות המשתמשות במיומנויות מתמטיות שונות כגון: ארגון נתונים בטבלה, פתרון בעזרת תרשים, פתרון בעזרת גאומטריה אנליטית, פתרון בעזרת דמיון משולשים, פתרון בעזרת טריגונומטריה.

ייצוג בעיות מילוליות, בעיקר בעיות תנועה נלמד בצורה ספירלית, החל מחטיבת הביניים. כדי להדגיש את יעילות פתרון השאלות בעזרת גרף ( מערכת צירים ) אפשר להביא כדוגמא את "בעיית הנזיר" מתוך [בתנועה מתמדת](#). (זו בעייה מספר 3 בקובץ). פתרון גרפי הוא קל ואלגנטי לעומת הפתרון " הקונבנציונלי" שהוא לעיתים מסובך יותר.

- **מושגים עיקריים הנדרשים להפעלת הסדנה**  
המהירות בו התהליך מתקיים ( מהירות), הזמן בו התהליך מתקיים, מתבצע (זמן), המרחק שעבר הגוף בפרק זמן זה ( מרחק) והקשר בין שלושתם.

- **מושגים עיקריים שניתן לפתח במהלך הסדנה**  
קצב השינוי של הדרך הוא המהירות ונמדד על ידי שיפוע הגרף של פונקצית הדרך כתלות בזמן.

בו התהליך מתבצע ( מהירות, קצב, תפוקה... ),  
הכמות המצטברת בפרק זמן זה ( מרחק, כמות העבודה,...),  
הקשר בין המושגים שיפוע גרף ומהירות,  
הקשר בין תחומים שונים של מתמטיקה

- **שילוב בתוכנית הלימודים**  
לאורך כל שנות הלימוד בבית ספר תלמיד נחשף לנושא של שאלות מילוליות. כבר בכיתה ז' עוסקים במושג קצב השינוי מתוך הצגת גרפית, בכיתה ח' עוסקים בבעיות תנועה בעזרת גרפים של פונקציה קווית. התלמידים לומדים לקרוא סיטואציות שונות מתוך הגרף, ולהפך לבנות גרפים לסיטואציות שונות. פתרון

הבעיה בעזרת שימוש בטבלה, תרשים ופונקציה קווית. בכיתות חזקות מומלץ להשתמש גם בפתרון בעזרת דמיון משולשים. בכיתה י אפשר לשלב טריגונומטריה ודמיון בצורות מורכבת.

## רציונל לסדנה

### • מה המסר העיקרי ולמה זה חשוב?

באופן כללי תלמיד צריך להתמודד עם הנושא "שאלות מילוליות" בתחומי דעת שונים כגון: פיזיקה, מחשבים, מדעים, כימיה... ואפילו במשחקי מחשב, כאשר לשחקן ניתנות אפשרויות שונות של אבזרים ותנאים שונים לרכשם ושימושם. הנושא מהווה אתגר לתלמידי תיכון בכל הרמות. יחד עם זאת הנושא חשוב מאוד לא רק להצלחה בבחינות בגרות אלא גם להתפתחות מקצועית ברוב המקצועות הקשורים למדעים. תוך כדי פתרון שאלות מילוליות התלמיד לומד ליצור מודל מתמטי לתהליך המתרחש במציאות ובכך משתכנע שניתן ליצור קשר בין המושגים המתמטיים לבין המציאות

### • על איזה צורך הסדנה באה לענות?

דרכי החשיבה של תלמידים, שונות זו מזו. לכן חשוב להראות דרכים שונות לפתרון שאלות מילוליות על מנת לאפשר לכל לומד לבחור את הסגנון "הקרוב לליבו". הייצוג הגרפי מסייע לא פעם בהבנת הסיטואציה המתוארת בשאלה.

### • הקשיים העולים בהוראת הנושא?

" בעיה מתמטית היא מצב שבו אדם או קבוצה של אנשים נקראים לבצע משימה שעבורה אין אלגוריתם מוכן ומייד מגדיר באופן שלם את שיטת הפתרון. פתרון בעיות מתמטיות מצריך ביצוע סדרה של פעולות שבאמצעותם מגיעים למטרה מסויימת " ( Lester, 1978 ).

בעייה מילולית במתמטיקה היא יחידת טקסט עצמאית , הכוללת משפט שאלה ומתארת אירוע לשוני. (Nesher, 1988; Nesher & Katriel, 1977). לעיתים יחידת

הטקסט מתארת אירוע מחיי היום – יום. מטרת התיאור היא מתן ביטוי למבנה לוגי המכתיב פעולה חשבונית מסוימת. ( נשר, 1983).

הקושי בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה הוא הצורך לתרגם את האירוע המתואר בשפה הטבעית לפעילות החשבונית המנוסחת בשפה המתמטית. המעבר מהשפה הטבעית מחייב הבנה תחבירית, סמנטית, ופרגמטית של השיח.

בכיתה ז' לראשונה מתבקש תלמיד, לקרא נתונים מהגרף ולבנות גרף מתאים לתיאור מילולי כלשהו. לעיתים קרובות המשימה קשה עבור התלמיד, אך הכרחית לפיתוח מיומנויות עבודה עם גרפים ופונקציות בעתיד.

מומלץ להיעזר ביישומון דינמי:

<http://www.transum.org/Software/SW/Distance-Time>

### ברוריה מרגולין ובת שבע אילני במאמרן **חינוך לחשיבה אוריינית בפתרון בעיות**

**מילוליות במתמטיקה** מתארות את תהליך פתרון בעיות מילוליות באופן הבא: "בבואנו לפתור בעיות מילוליות במתמטיקה, בעיות המלוות בטקסט, עלינו לגשר בין השפה המתמטית, המחייבת את ראיית הרכיבים המתמטיים, לבין השפה הטבעית, המחייבת התייחסות אוריינית לטקסט השלם" והן מציעות מודל רב שלבי לעשות זאת.

בין היתר הן מציינות כי "הקושי העיקרי זה חלוקת תנאי הבעיה לחלקים לוגיים, להחליט ממה ואיך להתחיל פתרון השאלה, מה לסמן בתור נעלם ואיך להרכיב משוואה מתאימה"

### **כדאי לשים לב לשם "שאלות מילוליות" המקודם בשנים האחרונות, ולנסות להשתמש בו במקום "בעיות מילוליות"**

#### **• התרומה העיקרית של הסדנה**

גם למורים וגם לתלמידים: להציג מספר דרכים אפשריות לפתרון שאלות מילוליות, לפתח חשיבה יצירתית.

## מהלך הסדנה

הסדנא המוצגת מיועדת לקהל המורים.

כל מורה יוכל להתאים את הסדנא לשעורים בכיתתו בהתאם לרמת הכיתה ושכבת הגיל.

1. חשיבות ההתמודדות עם שאלות מילוליות התוכנית הלימודים (10 דקות)
2. איך בונים את גרף התנועה? (10 דקות)
3. משימה פשוטה והצגת הפתרון במספר דרכים (20 דקות)
4. שאלת תנועה - עבודה בקבוצות . כל קבוצה בדרך אחרת (15 דקות)
5. הצגת הפתרון ושאלות לדיון (15 דקות)
6. שאלת אתגר - עבודה עצמאית (15 דקות)
7. הצגת הפתרונות (15 דקות)

### פירוט מהלך הסדנה (שימו לב, למצגת המצורפת):

1. דיון במליאה על חשיבות ההתמודדות עם שאלות מילוליות בתוכנית הלימודים:
  - א. מיקום הוראת שאלות מילוליות בתוכנית הלימודים שש שנתית. מה הידע שמגיעים התלמידים מחט"ב?
  - ב. הקשיים בהוראה ובלמידת הנושא מצד המורה ומצד התלמיד.
  - ג. איך כל אחד מתגבר על קשיים אלו (דרכים ייחודיות להתמודדות עם הקשיים "בשתי מילים" כגון מילות מפתח מהטקסט, למידת נושא במנות קטנות לאורך שנה וכו')
  - ד. כדי להדגים את יתרון ההסתכלות הלא שגרתית לבעיות תנועה המשתתפים יתבקשו לחשוב מספר דקות על פתרון של "חידת הנזיר" (שקף 2) במידה ומישהו יעלה על פתרון יפה ונכון יש להקדיש להצגתו דקות ספורות. במידה ואף אחד לא יעלה על הפתרון יש להציג את הפתרון בסוף הסדנה. (שקף 32)
2. כדי להתאים את הסדנא לצרכי הקהילות השונות צירפנו את השקפים 4 – 7 עם הסבר מפורט יותר על בניית גרפים לצורך פתרון שאלות מילוליות. כדאי להיעזר גם ביישומון הדינמי <http://newhighmath.haifa.ac.il/index.php/2015-05-11-06-53-50/948-2016-01-10-12-54-45> בו ניתן לבנות את גרף התנועה של שתי מכוניות, הנעות לאותו כיוון, כאשר

## מועדון ה-5-קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

מגדירים לכל אחת את מהירותה ואת נקודת המוצא שלה ואז לצפות במיקומן של המכוניות במהלך התנועה.

3. הצגה במליאה של מספר פתרונות שונים עבור שאלה מספר 1.

במהלך הצגתה של כל אחת מהשיטות חשוב להדגיש את הטעויות הנפוצות של תלמידים בעת השימוש בשיטה המוצגת. (ראה את הפרק "הנחיות והמלצות").

**(פתרון בעזרת חישובי שטחים לא נכלל בתכנית המקורית של הסדנא,**

**כיוון שנעה הכינה שקפים מתאימים, הם צורפו לסדנא ואתם מוזמנים**

**להשתמש בהם כרצונכם)**

דיון קצר על יתרונות והחסרונות של כל אחת מהשיטות: באיזו דרך הייתם בוחרים ומדוע? הדיון ישקף את המתרחש בכיתה, כלומר כל ילד יכול להתחבר לשיטה אחרת המאפשרת לו הבנה יותר טובה של הנושא.

4. לחלק את המשתתפים לקבוצות ולבקש מכל קבוצה לפתור את שאלה מספר 2

כאשר שיטת הפתרון מוכתבת על ידי המנחה:

א. קבוצה ראשונה בעזרת טבלה,

ב. קבוצה שנייה בעזרת תרשים,

ג. קבוצה שלישית בעזרת גאומטריה אנליטית,

ד. קבוצה רביעית בדרך אחרת השונה משלושת הקבוצות הראשונות.

5. אחר כך הצגה של מגוון הפתרונות על ידי נציג של כל אחת מהקבוצות ובמידה

שאף קבוצה לא פתרה את השאלה בעזרת טריגונומטריה, להציג את הפתרון

בעזרת דימיון משולשים במליאה.

6. בחלוקה אחרת לקבוצות, חשוב מאוד שבכל קבוצה חדשה יופיע נציג שהתנסה

בפתרון שאלה באחת מארבע השיטות שהוצגו.

לבקש מכל קבוצה חדשה לפתור את שאלה 4.

7. בסוף להציג את הפתרונות שהתגבשו ולדון בשיקולים בבחירת שיטת הפתרון.

## הנחיות והמלצות

1. הייצוג הגרפי של השאלה במערכת הצירים מסייע בהבנת הסיטואציה המוצגת בשאלה.
2. כאשר עוסקים בפתרון שאלות מילוליות בעזרת תרשים של הקו הישר, חשוב לציין שכל שאלת תנועה אפשר לחלק לשני סוגים עיקריים: גוף אחד נוסע או מספר גופים נעים.
3. במידה ומדובר במספר גופים, אין צורך בבניית טבלה רגילה.
4. בעזרת שימוש בסימון (משולש קטן, ריבוע קטן וכו') ניתן להדגים בתרשים פרקי זמן שווים ולכן באופן ויזואלי התלמיד יכול לראות, לא רק את ההתאמה בין הדרכים אלא גם את ההתאמה בין הזמנים. זה אחד היתרונות העיקריים של השיטה.
5. אם תלמיד בוחר לפתור את השאלה במערכת צירים כדאי לסמן את ציר ה- $X$  כציר הזמן ואת ציר ה- $Y$  כציר הדרך. במקרה זה גם לא כדאי להשתמש בטבלה סטנדרטית אלא לסמן את כל הנתונים ישירות במערכת צירים בתור נקודות וקווים. ליד כל נקודה לציין את מה שנתון בתור שעורים. מהירות תסומן כשיפוע של ישר.
6. חשוב להדגיש לתלמידים שכאשר מדובר בתנועה הלוך וחזור או תנועה לקראת גוף אחר, שיפוע הישר יהיה שלילי אבל המהירות היא תמיד חיובית. (המשמעות הפיסיקלית – מהירות שלילית היא מהירות בכיוון הנגדי לתנועה)
7. בפתרון בעיה בעזרת הנדסה אנליטית מומלץ להדגיש לתלמידים שהגרף עצמו של הפונקציה הקווית לא מייצג את אורך הדרך שהגוף עבר אלא ששיעור  $Y$  של נקודה על הגרף מסמן את מרחקה מתחילת התנועה.
8. פתרון שאלות תנועה בעזרת דמיון משולשים מצריך גם הוא, שימוש במערכת צירים.
9. אפשר להזכיר לתלמידים ששיפוע של ישר הוא טנגנס של הזווית בין הישר לכיוון החיובי של ציר ה- $X$ . אז תפתח אפשרות לפתור שאלות מילוליות בעזרת שימוש בטריגונומטריה.

**מצרפת מצגת מוכנה לסדנה עם המשימות והפתרונות**



## השאלות והמשימות מתמטיות:

### משימה 1:

משני מקומות A ו-B, שהמרחק ביניהם 800 ק"מ, יצאו שתי מכוניות זו לקראת זו.  
מכונית אחת יצאה מ-A בשעה 6:00, והמכונית האחרת יצאה מ-B בשעה 7:00.  
שתי המכוניות נפגשו באמצע הדרך בין A ל-B. מהירות המכונית שיצאה מ-A קטנה ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית שיצאה מ-B.  
מצא את המהירות של המכונית שיצאה מ-A.

### משימה 2:

שתי רכבות יצאו בו זמנית. האחת מעיר א לעיר ב, והשנייה מעיר ב לעיר א.  
עד הפגישה, עברה אחת 100 ק"מ יותר מהשנייה. הרכבת הראשונה הגיעה לעיר ב, 9 שעות לאחר הפגישה, והשנייה הגיעה לעיר א, 16 שעות לאחר הפגישה. מהירות הרכבת לא השתנתה במשך כל הדרך.  
מה המרחק בין שתי הערים?

### משימה 3: ( לפי הצורך )

#### בגרות קיץ 2014 , מועד ב' ( הדוגמה ה"קלה " )

רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.

המהירות של הרץ ה-I הייתה 6 קמ"ש ומהירות של הרץ השני הייתה 7.5 קמ"ש. כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים, יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ במהירות קבועה. רץ III פגש בדרך את הרץ ה-I, ושעה אחר כך הוא פגש את הרץ ה-II. מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II.

### משימה 4:

#### בגרות חורף תשע"ב

משאית יצאה מעיר A לעיר B. בדיוק באותו רגע יצאה מכונית מעיר B לעיר A. כאשר הגיעה המכונית ל-A היא חזרה מיד ל-B, וכאשר הגיעה ל-B היא מיד שוב יצאה ל-A. המכונית פגשה בדרכה את המשאית שלוש פעמים, לפני שהמשאית הגיעה ל-B.

הפגישה הראשונה הייתה כעבור 2 שעות מרגע היציאה של המכונית והמשאית לדרך.

הפגישה השנייה הייתה כעבור  $4\frac{2}{3}$  שעות מרגע היציאה.

הפגישה השלישית הייתה במרחק 40 ק"מ מ-B.

מצא את המהירות של המשאית (המהירויות של המכונית והמשאית אינן משתנות).

## הרחבות וקישורים

- 1) פעילות בנושא של בעיות תנועה עבור כיתות ז' מדעיות
- 2) שאלות תנועה עבור כיתות ז' מדעיות -

[לתלמיד](#)

[מדריך למורה](#)

- 3) פיצוחים מתמטיים:

[מרוץ מכוניות דינאמי](#), ישומן דינמי המדגים בצורה ויזואלית את הגרף המתאים לתנועת כלי

הרכב

[בעיות תנועה בדרך אחרת](#) - אוסף בעיות תנועה והדרכה לפתרון בעזרת גרפים.

[בתנועה מתמדת](#)- מגוון שאלות חידתיות עם שימוש ביישום דינמי

- 4) מאמרים שונים בנושא של בעיות מילוליות

[בעיות מילוליות בהוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה](#), פיטר סמובול, עלה 46

[פיתוח חשיבה מתמטית של תלמידים בפתרון בעיות מילוליות](#), יפים כץ, מאיה כץ, על"ה 48

[פתרונות שונים לבעיות הספק באמצעים גרפיים](#), אביטל אלבאום כהן, ג'ייסון קופר, על"ה 51

- 5) סרטונים של שיעורים בנושא של פתרון בעיות תנועה בעזרת גרף

[פתרון בעיות תנועה באמצעות גרפים](#) - פרויקט רמזור

[בעיות הספק](#), שיעור עדש"ה של קלאודיה לייקה - עדשה

[אתגר 5 כיתה יא שאלות מילוליות](#)