מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

לצאת מהמקום

(הגיאומטרי)

משימות חקר בשילוב טכנולוגיה

עדה לוי

סבאח חאג' מרון

גלינה פלדמן

מבוא

לחקר מתמטי מקום מרכזי בעבודת מתמטיקאי מקצועי .שילוב בעיות חקר במתמטיקה של בית הספר ,מאפשר למורים ותלמידים פעילויות מתמטיות משמעותיות ,הכוללת גילוי עובדות מתמטיות חדשות ,ניסוח בעיות חדשות נוספות ופתרונן .לגאומטריה דינמית תפקיד ייחודי בעיסוק בבעיות חקר בגיאומטריה ובניסוח בעיות חדשות."

הסדנה המוצעת משלבת עבודת חקר בעזרת תוכנה גיאומטרית דינאמית כגון גאוגברה. משימות חקר הן פעילויות רב שלביות, פתוחות, שמזמנות עבודה ברמות שונות. החקר לא מהווה נושא נפרד, הנלמד במסגרת המתמטיקה, , זו גישה בלימודי המתמטיקה. אופיין של משימות החקר והעבודה המומלצת בקבוצות, מעודדים ומפתחים כשרים חיוניים להתפתחות מתמטית, למשל: השתתפות בדיונים מתמטיים וכישורי תקשורת (ניסוח הסברים, מתן הצדקות, יכולת שכנוע, ארגון עבודה, מעבר בין ייצוגים).

משימות החקר מעודדות את התלמידים לחשיבה רפלקטיבית, כגון: העלאה ואימות של השערות, חשיבה לאחור, ניתוח משמעות התוצאות, דיון והשוואה בין דרכי פתרון שונות, הבעת דעה אישית וכו'.

המשימות בסדנה זו משלבות שימוש בכלי ממוחשב. השימוש בתוכנה דינמית מסייע לתלמידים לפתור בעיות באמצעות למידה מדוגמאות. יכולתו של המחשב ליצור באופן מהיר דוגמאות רבות ומגוונות, לשמר ולשחזר מהלכים, ולספק משוב איכותי ולא רק שיפוטי, מספקת ללומד מידע על המושג המתמטי המהווה בסיס להכללות והשערות הדורשות הוכחה.

ההוראה בסביבה טכנולוגית מציבה בפני המורים אתגר פדגוגי הקשור להצגת חשיבותה ונחיצותה של ההוכחה המתמטית לאחר שמשערים השערה.

מהלך הסדנה

1. עיצוב משימת חקר בשילוב טכנולוגיה (5 דקות)
2. הצגת משימה בנושא מקומות גיאומטריים במעגל (15 דקות)
3. במליאה הצגה של שאלת חקר אחת מכל קבוצה (5 דקות)
4. הצגת שאלות מבחינות הבגרות, חקר באמצעות יישומון (15 דקות)
5. מקומות גיאומטריים באליפסה. הצגת חקר באמצעות יישומון (5 דקות)
6. מקומות גיאומטריים בפרבולה. הצגת חקר באמצעות יישומון (5 דקות)
7. האם התוצאות מתקיימות גם כאשר עקומת המוצא אינה חתך חרוט? חקר באמצעות יישומון (5 דקות)
8. דיון ומסקנות. (10 דקות)

הנחיות והמלצות

הדגש של הסדנה הוא התנסות בהעלאת שאלות חקר, לכן מומלץ לאפשר כמה שיותר עבודה בקבוצות במשימות 1 , 4. כל קבוצה תבנה יישומון המתאים לתנאי הבעיה. באמצעות היישומון הקבוצה תשער מהו הפתרון וכן תעלה שאלות חקר והשערות נוספות . יש להראות פתרון אלגברי להשערות השונות ככל שהזמן יאפשר.

בסדנה יש שימוש רב ביישומונים. המלצתנו היא לתת למשתתפים לבנות לבד את היישומונים הראשון השני והשלישי ולעודד חקר עם בנייות בגאוגברה. במשימות הבאות נציג את את השימוש ביישומונים.

1. עיצוב משימת חקר בשילוב טכנולוגיה

חקר מתמטי הוא מרכיב מרכזי בעבודתו של מתמטיקאי מקצועי. לאחרונה עולה המודעות לחשיבות של פעילות חקר כחלק אינטגרלי בהוראה ובלמידה של ממטיקה בביה"ס. משימות חקר בכיתת המתמטיקה הינן לרוב מאתגרות ודורשות מאמץ קוגניטיבי ומאפשרות לתלמידים לעבוד ברמת מוטיבציה גבוהה.

נציג מודל לעיצוב משימת חקר בשילוב טכנולוגיה.

תיאור המצב המתמטי הנחקר

להפוך שאלת "הוכח ש.." לשאלה פתוחה.

1. **חקרו** בעזרת התוכנה והעלו **השערות**
2. **אוששו או הפריכו** השערתכם בעזרת התוכנה
3. **הסבירו** במילים שלכם מדוע **השערתכם נכונה.**
4. **הוכיחו.**

5. **חקרו** מצבים דומים, **האם ניתן להכליל**?

מה אם כן? מה אם לא?

לפי המודל , התהליך חוזר על עצמו. מתוך כל שאלה אפשר להגיע לשאלה נוספת, ולהתחיל את התהליך מהתחלה.

האסטרטגיה המוכרת ביותר ליצירה וניסוח של בעיה, ידועה כגישת "מה אם לא". הגישה מבוססת על שינויים שיטתיים של הנתונים ובחינת ההשפעה של שינויים אלה על המסקנות. גישה זו מזמנת העלאת השערות חדשות ופיתוח תובנות נוספות לגבי הבעיה. גישה נוספת לפיתוח בעיות חדשות היא גישת "מה אם כן". גישה זו מבוססת על הוספת תכונות לאובייקט הנתון.

לפי:

ניסוח של בעיות חקר חדשות בסביבת גאומטריה דינמית (DGE) בעיות הנוצרות למטרת חקר ובעיות הנוצרות במהלך חקר, רוזה לייקין, על"ה 52

2. הצגת משימה

שאלה 1

נתון מעגל קנוני. A נקודת החיתוך של המעגל עם ציר y בחלקו החיובי. מנקודה A העבירו מיתר החותך את המעגל בנקודה C. נסמן את אמצע המיתר בנקודה M.

מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הנוצרות באופן זה?

אוששו או הפריכו בעזרת הגאוגברה את השערכתכם.

הסבירו במילים את המקום הגיאומטרי והוכיחו.

חקרו מצבים דומים – העלו שאלות נוספות לחקר (מה אם לא? מה אם כך?)

העלאת השערות לפתרון וכן שאלות חקר נוספות, יתבצעו באמצעות בניות בגאוגברה בכל קבוצה . דף הוראות לבניית היישומון יינתן למי שיזדקק לכך.

3. העלאת שאלות חקר על ידי המשתתפים

בשלב זה, בדיון במליאה, נקבל השערות שונות מהקבוצות. כגון:

- ומה אם.. הנקודה לא באמצע המיתר
- ומה אם...הנקודה מחוץ למעגל
- ומה אם...המעגל הוא לא קנוני
- ומה אם...המיתר לא במעגל אלא באליפסה, פרבולה...
- ומה אם לא... לא מיתר?

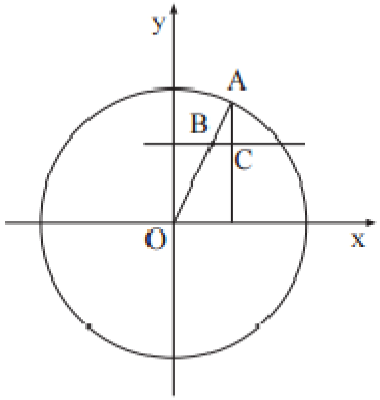
אנו נציע מספר שאלות שעשויות לעלות ומובילות לתוצאות מפתיעות:

4. שאלות במעגל

מה אם הנקודה של המקום הגיאומטרי (M) לא תהיה באמצע המיתר , אלא תחלק אותו ביחס של m:n (חקר באמצעות יישומון גאוגברה)

שאלה 2א

נציג שאלה מתאימה מבחינת בגרות, חורף תשס"ו, עבור 0<(m:n)<1



1. נתון המעגל $x^2 + y^2 = R^2$.
דרך ראשית הצירים O מעבירים ישר כלשהו.
הישר חותך את המעגל בנקודה A .
מהנקודה A מורידים אנך לציר ה־ x .
B היא נקודה על הקטע OA כך ש־ $OB = 2AB$.
דרך B מעבירים ישר, המקביל לציר ה־ x וחותך את האנך בנקודה C (ראה ציור).

א. הבע באמצעות R את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות C הנוצרות באופן זה.

נחקור באמצעות יישומון את ההשערה ביחס למקום הגיאומטרי של נקודה C.
הרחבת השאלה עבור הקו המוביל של הסדנה:
מה נוכל לומר על המקום הגיאומטרי של נקודה B ?

שאלה 2ב

נציג שאלה מבחינת בגרות, חורף תש"ע, עבור 1<(m:n)

.1 נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=2ax$, $a>0$.
במעגל מעבירים מיתר AB העובר דרך ראשית הצירים.
מנקודה B ממשיכים את המיתר עד לנקודה P כך ש- $AB=BP$, ושיעור ה- x של P הוא חיובי.
א. (1) מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות P הנוצרות באופן שתואר (הבע באמצעות a).

5. שאלות עם אליפסה

שאלה 3 – שאלה מבגרות

נתונה אליפסה קנונית החותכת את ציר X בנקודות A ו B. C נקודה כלשהי על האליפסה. נחבר את נקודה C עם ראשית הצירים O. הקטע OC הוא תיכון במשולש ABC. נסמן ב M את נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC.
מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הנוצרות בדרך זו?

(חקר באמצעות גאוגברה)

- מה אם הנקודה M תחלק את הקטע OC ביחס m:n ? (חקר באמצעות גאוגברה)

6. שאלות עם פרבולה

שאלה 4

נתונה פרבולה קנונית שקדקדה על ציר Y, החותכת את ציר ה X בנקודות A ו B. C נקודה כלשהי על הפרבולה. נחבר את נקודה C עם ראשית הצירים O. הקטע OC הוא תיכון במשולש ABC. נסמן ב M את נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC. מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הנוצרות בדרך זו? (חקר באמצעות גאוגברה)

- מה אם הנקודה M תחלק את הקטע OC ביחס m:n ? (חקר באמצעות גאוגברה)

7. האם התוצאות מתקיימות גם כאשר עקומת המוצא אינה חתך חרוט?

ביישומון נבנה את גרף הפונקציה $f(x)=x^3-9x^2$ A היא נקודה כלשהי במערכת הצירים. ו B -היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה. הנקודה M נמצאת על הקטע AB כך שמתקיים יחס קבוע בין אורכי הקטעים $\frac{AM}{AB}=K$. ניתן לראות שגם במקרה זה, כאשר גוררים את הנקודה B לאורך גרף הפונקצייה, מתוות עקבות הנקודה M עקומה הנראית כמו צילום בהקטנה של גרף הפונקציה הנתונה.

8.דיון ומסקנות

נציע שתי נקודות מעניינות לדיון. מתמטית ופדגוגית.

1. עם ביצוע הבנייה של היישומנים מתגלה תופעה מעניינת: עבור כל יחס של חלוקת הקטעים, ועבור כל בחירה של הפרמטרים, עקבות הנקודה M יוצרות מקום גאומטרי הדומה למקום הגאומטרי המקורי.

2. **מדוע מורים נמנעים משאלות חקר?**

- יש מורים שלא התנסו בעצמם בחקר
- יש מורים חסרי נסיון בסביבות דינאמיות
- בעיות חקר אינן זמינות בספרי הלימוד
- לעיתים בעיות חקר מובילות להשערות לא צפויות שהוכחתן מורכבת
- קושי בשימוש בטכנולוגיה

הידע של המורים, מיומנותם והאמונות בהן הם מחזיקים, קובעים האם ואיך הם משלבים חקר מתמטי בכיתותיהם.

הצעות לפתרונות

1. **הצעה לפתרון כללי לשאלה 1.**

כאשר המשימה ניתנת לתלמידים יש להתחיל מדוגמאות פרטיות ולאחר מכן לעבור להכללה.

נתון מעגל. A נקודה קבועה על המעגל. מנקודה A העבירו מיתר החותך את המעגל בנקודה C . נסמן את אמצע המיתר בנקודה M. מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הנוצרות באופן זה?

נסמן: $A(0,R), C(x_c, y_C), M(x_M, y_M)$

משוואת המעגל : $x^2+y^2=R^2$

M אמצע המיתר ולכן מתקיים:

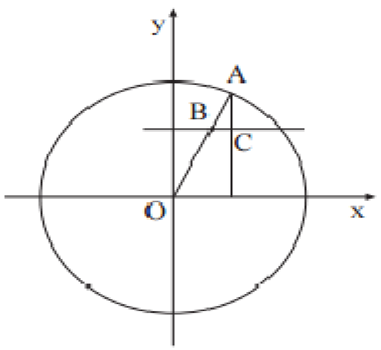
$$x_C = 2x_M - x_A$$
$$y_C = 2y_M - y_A$$

נקודה C על המעגל ולכן:

$$(2x_M)^2 + (2y_M)^2 = R^2$$
$$(x_M)^2 + (y_M)^2 = (\frac{R}{2})^2$$

המקום הגיאומטרי הוא מעגל. נמצא קשר בין מרכז המעגל הנתון ורדיוסו למרכז ורדיוס המעגל הנוצר כמקום גיאומטרי .

2. **הצעה לפתרון שאלה 2א.**



1. נתון המעגל $x^2 + y^2 = R^2$.

דרך ראשית הצירים O מעבירים ישר כלשהו.

הישר חותך את המעגל בנקודה A .

מהנקודה A מורידים אנך לציר ה־ x .

B היא נקודה על הקטע OA כך ש־ OB = 2AB .

דרך B מעבירים ישר, המקביל לציר ה־ x וחותך את האנך בנקודה C (ראה ציור).

א. הבע באמצעות R את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות C הנוצרות באופן זה.

ביישומון ניתן להפעיל עקבות על נקודה C וכן על נקודה B.

נציג פתרון למקום הגיאומטרי של שתי הנקודות. יחס החלוקה של נקודה B (2:1) את הקטע OA, מתאים לשאלה על נקודה B שבה רצינו לדון בסדנה.

נסמן: $A(x_A, y_A), O(0,0), B(x_B, y_B), C(x_A, y_B)$

עבור נקודה B

נקודה B מחלקת את הקטע OA ביחס 2:1 ולכן מתקיים:

$$x_A = 1.5x_B$$
$$y_A = 1.5y_B$$

נקודה A על המעגל ולכן:

$$(1.5x_B)^2 + (1.5y_B)^2 = R^2$$
$$x_B{}^2 + y_B{}^2 = \frac{4}{9}R^2$$

כל הנקודות B יוצרות מעגל שמרכזו כמרכז המעגל הנתון ורדיוסו $\frac{2}{3}R$

עבור נקודה C מתקיים

$$x_A = x_C$$
$$y_A = 1.5y_C$$

נקודה A על המעגל ולכן:

$$(x_C)^2 + (1.5y_C)^2 = R^2$$
$$\frac{x_C{}^2}{R^2} + \frac{9y_C{}^2}{4R^2} = 1$$

כל הנקודות C יוצרות אליפסה

הצעה לפתרון שאלה 2b.

1. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.
במעגל מעבירים מיתר AB העובר דרך ראשית הצירים.
מנקודה B ממשיכים את המיתר עד לנקודה P כך ש- $AB = BP$, ושיעור ה- x של P הוא חיובי.
א. (1) מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות P הנוצרות באופן שתואר (הבע באמצעות a).

השאלה מתיחסת יחס חלוקה שבו הנקודה של המקום הגיאומטרי נמצא מחוץ למעגל.

משוואת המעגל הנתון $(x-a)^2+y^2=a^2$. יש לשים לב שכאשר מדברים על מיתר AB העובר דרך ראשית הצירים, נובע מכך שנקודה A נמצאת בראשית הצירים.

נקודה B נמצאת באמצע הקטע AP ולכן מתקיים:

$$x_B=\frac{x_P}{2},y_B=\frac{y_P}{2}$$

נקודה B נמצאת על המעגל ולכן:

$$(\frac{x_P}{2}-a)^2+(\frac{y_P}{2})^2=a^2$$

$$(x_P-2a)^2+{y_P}^2=4a^2$$

המקום הגיאומטרי שנוצר הוא מעגל

ניתן להכליל שכאשר נתון מעגל ו A נקודה כלשהי במערכת הצירים, B היא נקודה כלשהי על המעגל. הנקודה M נמצאת על הקטע AB כך שמתקיים יחס קבוע בין אורכי הקטעים $\frac{AM}{AB}=K$ **. אז המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הנוצרות באופן זה, הוא מעגל.**

3. הצעה לפתרון משימה מס'3.

נתונה אליפסה קנונית החותכת את ציר X בנקודות A ו B. C נקודה כלשהי על האליפסה. נחבר את נקודה C עם ראשית הצירים O. הקטע OC הוא תיכון במשולש ABC. נסמן ב M את נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC. מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הנוצרות בדרך זו? (חקר באמצעות גאוגברה)

- מה אם הנקודה M תחלק את הקטע OC ביחס m:n ? (חקר באמצעות גאוגברה)

ניתן לראות הקבלה בין משימה זאת לבין משימה 2א. כאן נתונה אליפסה ונקודה C כלשהיא עליה. על OC בוחרים נקודה M כך ש $\frac{CM}{MO}=\frac{2}{1}$

משוואת האליפסה הקנונית

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

בין נקודות M ו C מתקיים הקשר

$$x_M=\frac{x_C}{3},y_M=\frac{y_C}{3}$$

$$x_C=3x_M,y_C=3y_M$$

נקודה C על האליפסה ולכן:

$$\frac{(3x_M)^2}{a^2}+\frac{(3y_M)^2}{b^2}=1$$

המקום הגיאומטרי המתקבל הוא אליפסה

ניתן להכליל שכאשר נתונה אליפסה ו A נקודה כלשהי במערכת הצירים, B היא נקודה כלשהי על האליפסה. הנקודה M נמצאת על הקטע AB כך שמתקיים יחס קבוע בין אורכי הקטעים $\frac{AM}{AB}=K$ **. אז המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הנוצרות באופן זה, הוא אליפסה.**

4. הצעה לפתרון משימה מס'4

נתונה פרבולה קנונית שקדקדה על ציר Y, החותכת את ציר ה X בנקודות A ו B. C נקודה כלשהי על הפרבולה. נחבר את נקודה C עם ראשית הצירים O. הקטע OC הוא תיכון במשולש ABC. נסמן ב M את נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC. מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הנוצרות בדרך זו? (חקר באמצעות גאוגברה)

ניתן לראות הקבלה בין משימה זאת לבין משימות 2א ו 3. כאן נתונה פרבולה ונקודה C כלשהיא עליה. על OC בוחרים נקודה M כך ש $\frac{CM}{MO}=\frac{2}{1}$

משוואת הפרבולה הקנונית שקודקודה על ציר y

$$y=ax^2+c$$

בין נקודות M ו C מתקיים הקשר

$$x_M=\frac{x_C}{3},\ y_M=\frac{y_C}{3}$$

$$x_C=3x_M,\ y_C=3y_M$$

נקודה C נמצאת על הפרבולה ולכן

$$3y_M=9a{x_M}^2+c$$

$$y_M=3a{x_M}^2+\frac{c}{3}$$

המקום הגיאומטרי הנוצר הוא פרבולה קנונית שקודקודה על ציר y

מקורות:
1. חקירת מקומות גאומטריים בסביבת גאומטריה דינמית מה ניתן ללמוד מזה ?, סגל סטופל אוקסמן, על"ה 52 , 2 אוגוסט 2015

2. Fahlgren &Brunstrom (2014). A Model for Task Des52ign with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry Environment. *Technology, Knowledge and Learning*, 19, 287–315

3. **ניסוי של בעיות חקר חדשות בסיבת גאומטריה דינמית (DGE) בעיות הנוצרות למטרת חקר ובעיות הנוצרות במהלך חקר**, רוזה לייקין, על"ה 52