



מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

כל משולש הוא שווה שוקיים?

פתיח או סיכום קצת אחר
גאומטריה : מעגל, אנך אמצעי וחוצה זווית

צוות מועדון ה-5

מבוא

בפעילות זו נציג רעיון לפעילות מפתיעה שיכולה להוות פתוח או סיכום בגיאומטריה במושגים חוצה זווית ואנך אמצעי, הניתן לשלבו בכיתה י' או י"א אחרי או לפני שמלמדים מעגל חוסם משולש. שאלה זו שייכת לקבוצת שאלות מתחומים שונים שאנו קוראים להן "אשליות מתמטיות" או "פרדוקסים".

מהו פרדוקס?

אפשר לומר שפרדוקס הוא אמת העומדת על ראשה כדי למשוך תשומת לב. אין ספק שפרדוקסים שובים את השכל. בעת ובעונה אחת הם מפתים, מרגיזים, משעשעים ולעיתים מכעיסים. יתרה מזאת, הם מעוררים סקרנות, מניעים וממריצים את החשיבה. המונח "פרדוקס" כולל: חוסר עיקביות, דוגמה נגדית לרעיון מקובל למדי, תפיסה מוטעית, טענה אמיתית אשר נראית כשקרית, או טענה שקרית שנראית כאמיתית. מתוך ויקיפדיה:

פרדוקס (מיוונית עתיקה **παράδοξος פרדוקסוס**) סידרה של טענות, שמוכיחה כי ידיעותיו או אמונותיו של האדם סותרות זו את זו. באופן כללי ניתן להגדיר את הפרדוקס כמושג או טענה, אשר הסיבה לאמיתותם הופכת בסופו של דבר להיות הסיבה להפרכתם, וחוזר חלילה.

פרדוקסים יכולים לשכנע אנשים וקהילות חוקרות לשפר את ידיעותיהם או לשנות את אמונותיהם. פרדוקסים יכולים להתברר גם כניסוחים שגויים של טענות, המציגים רק בעיה לכאורה.

הפרדוקס יכול לבטא **סתירה חיצונית** כאשר הוא סותר ידע או הנחה קודמים, או **סתירה פנימית** כאשר ממנו עצמו נובעים דבר והיפוכו.

פרדוקסים יכולים להוות סיבה לבחינה מחדשת של תורה מתמטית.

(לדוגמה, פרדוקס ראסל הביא לבחינה מחדשת של הגישה הנאיבית לתורת הקבוצות ולפיתוחה של תורת הקבוצות האקסיומטית.)

במפגשים הבאים נחזור לשאלות מסוג זה.

הנחיות:

- אנו ממליצים, לתת את המשימה לתלמידים /למורים ולבקש מהם:
- להסביר את מהלך ההוכחה, "ולשכנע" בנכונתה. יש למצוא את הסיבה להוכחה השקרית.
 - תתכן ותעלה ההשערה כי מפגש חוצה הזווית והאנך האמצעי אינם נפגשים בתוך המשולש. אז נבקש לנמק מדוע? ונשאל היכן אמור להיות המפגש?
 - רצוי לבנות את המצב בגאוגברה ולהדגים מצבים שונים בעזרת גרירה. בכיתה היתה הפתעה שנקודת החיתוך היא על המעגל החוסם. מדוע?
 - להוכיח את הטענה או טענות שמסבירות את "הטעות".

שאלות לדיון:

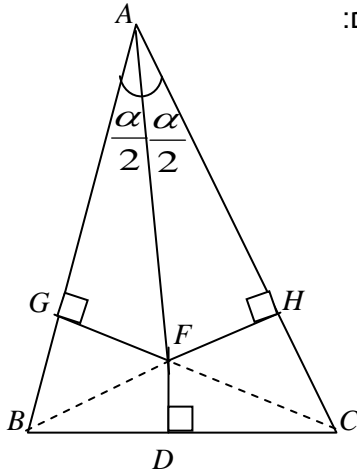
- האם אפשר לנסח את הפרדוקס גם בדרך אחרת?
תשובה אפשרית: במשולש ישר זווית ניצב שווה ליתר.
- האם וכיצד כדאי לשלב פעילות כזו בכיתה? באיזה שלב?
הצעות:
 - פעילות זו יכולה להוות פתיח מפתיע ומאתגר לשיעור בנושא מעגל חוסם משולש.
 - פעילות זו יכולה להוות סיכום או חזרה לשיעור בנושא מעגל חוסם משולש או תזכורת למשפט חוצה הזווית בכיתה י או יא.
 - שאלת אתגר לגוון
- מה היתרון של שאלות מסוג זה?
- האם יש לכם רעיונות לפעילות פתיח או סיכום קצת אחר?
לעודד את המורים לשתף, ולהביא גם למפגשים הבאים רעיונות לגוון ההוראה

ביצוע המשימה והדיון אמור לארוך כ-30 דקות.

המשימה

מתוך הפיצוח "אשליות מתמטיות" של מרכז המורים / תבלינים מתמטיים

האם כל משולש הוא שווה שוקיים?



קרול לואיס (מחבר עליסה בארץ הפלאות) הוכיח שכל המשולשים הם שווי שוקיים:

נתון משולש $\triangle ABC$ כלשהו, כאשר D אמצע צלע BC .

AF חוצה זווית הראש ו- DF אנך אמצעי נפגשים בנקודה F .

נוריד אנך מהנקודה F לצלע AB ונסמן ב- G את נקודת החיתוך.

נוריד אנך מהנקודה F לצלע AC ונסמן ב- H את נקודת החיתוך.

הערה: שימו לב, אם מצירים את המשולש על הלוח,

ציירו אותו "דומה" למשולש שווה שוקיים.

קיבלנו:

$$AH=AG \iff (\text{חופפים לפי צ.ז.צ.}) \triangle AGF \cong \triangle AHF$$

$$HC=GB \iff (\text{משולשים ישרי זווית השווים בניצב וביתר}) \triangle FGB \cong \triangle FHC$$

$$AC=AB \iff AG+GB=AH+HC, \text{ לפיכך,}$$

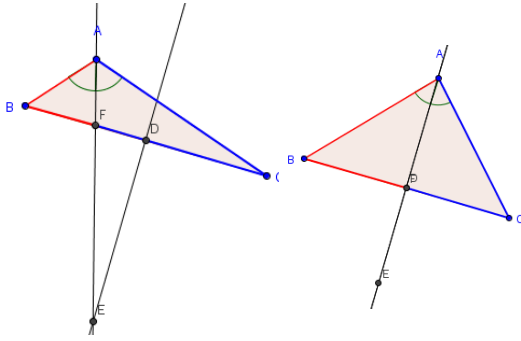
כלומר כל משולש הוא שווה שוקיים. היתכן?

מקור: תבלינים מתמטיים, מחר 98, הטכניון.

הצעה לפתרונות המשימה

הציור זה שהטעה אותנו.

חוצה זווית C והאנך האמצעי לצלע AB נפגשים בנקודה E
שנמצאת מחוץ למשולש ולא בתוכו.



הסבר א:

על פי משפט חוצה הזווית, חוצה הזווית מחלק את הצלע
ביחס הצלעות הכולאות. משמע חוצה הזווית מקצה קטע
קצר יותר ליד הצלע הקצרה, וקטע ארוך יותר ליד הצלע
הארוכה. רק במשולש שווה שוקיים האנך האמצעי וחוצה
הזווית מתלכדים בנקודת אמצע הצלע.
יפה להמחיש בעזרת הגאוגברה

הסבר ב:

היכן נפגשים חוצה הזווית והאנך האמצעי?
למעשה נקודה E נמצאת על המעגל החוסם

את המשולש ABC . וזאת בגלל שהזוויות ההיקפיות $\angle CAE$ ו- $\angle BAE$
שוות (AE חוצה זווית) לכן הן נשענות על קשתות שוות BE ו- CE .
 DE אנך אמצעי, מכאן, $\triangle BDE \cong \triangle CDE$ ולכן המיתרים BE ו- CE
שוות זה לזה.

אז שהציור לא יבלבל אתכם...