מועדון ה-5

קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

נהפוך הוא

הפונקציה ההפוכה ונגזרתה

הבניית ידע

אילאיל בורדה ופאינה פרצב

אוניברסיטת חיפה
University of Haifa
جامعة حيفا

חמ"ה
מרכז אינטר-דיסציפלינארי
חקר, חינוך, מחוננות והצטיינות

מרכז ארצי
למורים למתמטיקה
בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في
المرحلتين الاعدادية والثانوية

THE TRUMP
FOUNDATION
קרן טראמפ

מטרות הסדנה

1. עיסוק במושג הפונקציה ההפוכה, מושג בסיסי המלווה אותנו לאורך כל לימודי החדו"א, והדגשת חשיבותו להבנת הנושאים בהם אנו עוסקים בביה"ס התיכון
2. קישוריות - סדנא זו מתקשרת ישירות לסדנא על פונקציה מורכבת דרך העיסוק בפונקציות ההפוכות לעצמן.
3. הבאה למודעות תהליכי הבניית ידע

רקע מתמטי

הגדרת פונקציה הפוכה:

פונקציה g נקראת הפוכה לפונקציה f אם ורק אם התחום של הפונקציה g הוא הטווח של הפונקציה f , הטווח של הפונקציה g הוא התחום של הפונקציה f , והפונקציה g מתאימה לכל ערך (תמונה) של הפונקציה f את המקור שלו בפונקציה **f.**

הרחבה בנספח למורה.

רקע דידקטי

ברוב הסדנאות עד היום עבדנו למעשה בגישה **קונסטרוקטיביסטית** (הבניית ידע). חשוב שגם נביא למודעות שלנו ושל המורים עובדה זו.

בסדנה זו, בנוסף לתכנים המתמטיים, ניתן את הדעת על **חשיבה ממבט על, רפלקציה על תהליכי הבניית הידע** .

מהי הבניית ידע?

על פי פיאז'ה (פיאז'ה, ז., 1966) למידה היא תהליך הבניה , בו הילד תוך כדי 'פגישה עם גירוי', **בונה** ידע ומיומנויות חדשים תוך קישור לידע קודם בתהליכים פנימיים שפיאז'ה סיווג כארגון והסתגלות. ההסתגלות בנויה מהטמעה (assimilation) והתאמה (accomodation).

ידע קיים משפיע על הדרך בה אדם מפענח מידע חדש ('הטמעה'); האדם משלב את המידע החדש במערכת סכמות הקיימת אצלו (מונע על ידי 'הצורך' בארגון') ותוך כדי

כך משתנה מערכת הידע הקיים שלו (מתרחשת 'התאמה') ונבנות סכמות חדשות או מתפתחות סכמות קודמות.

בתהליך ההטמעה-התאמה נוצרים איזונים, מעין שיווי משקל עדין בין ההטמעה להתאמה. זה תהליך ההסתגלות.

הלומדים זקוקים להזדמנות לעבד את הבנתם בדרכים שונות ולגלות מחדש את המושגים אשר הוצגו בפניהם. (פרקינס, ד.,1995).

למידה היא תהליך פעיל של בנית ידע ומיומנויות ולכן התלמיד חייב להיות פעיל ולקיים אינטרקציה עם סביבתו.

בלמידה רכיב קוגניטיבי, רגשי ומטה קוגניטיבי. ברכיב הרגשי נכלול יצירת מוטיבציה, בטחון עצמי, הנאה מלמידה, התמודדות עם אתגרים ועוד.

הרבה מן הסדנאות שעברנו בקהילה מבוססות על עקרונות אלה. הפעם גם נשוחח על כך.

איך ניסינו להביא לידי ביטוי את הבניית הידע בסדנא הקרובה?

- בפעילות זו דגש על עבודה עצמית של התלמיד בבנייה של הבנת אותו מושג בשתי דרכים שונות (בשקפים – היפוך/סיבוב, בניית יישום במחשב – סימטריה)
- התלמיד בונה בעצמו את היישום, שלב אחר שלב. עליו לתמלל את תהליך הבניה, דבר המסייע לו בהבניית המושג.
- המטלות השונות מביאות **היבטים שונים של אותו מושג** (חילוף תפקידי הצירים, שיקוף בישר, ההשלכות של הנ"ל נגזרות הפונקציות , קשר בין היבט גרפי ואלגברי).
- קישוריות: לסיכום הסדנא הוספנו מטלות המקשרות את מושג הפונקציה ההפוכה למושג הפונקציה המורכבת בו עסקנו בסדנאות קודמות, דרך פונקציות ההפוכות לעצמן.
- אנו מציעות להקדיש זמן לדיון: רפלקציה על תהליכי הבניית הידע

קהל היעד:

הסדנא במבנה הנוכחי מיועדת למורים, אך חלקיה השונים מיועדים בהחלט ואף נוסו בעבודה בכיתות בשלבי הוראה שונים בכיתה. ייחודה הוא בהיותה כלי עבודה הניתן לשימוש ספירלי בשלבים שונים בהוראת החדו"א בתיכון.

מהלך הסדנא

1. פתיחה קצרה: רקע בנושא קונסטרוקטיביזם (הבניית ידע) בהוראה (3 דקות)
2. הפונקציה ההפוכה כחילוף תפקידי ציר ה x וה y עבודה בעזרת שקפים (10 דקות)
3. הפונקציה ההפוכה כשיקוף בישר $y=x$ עבודה עצמית מול מחשב. (10 דקות)
   ניתן לעבור בחטף , בשלב מילוי הטבלה בסדנא של המורים
4. נגזרת הפונקציה ההפוכה – עבודה עצמית במחשב (10 דקות)
5. נגזרת הפונקציה ההפוכה - הוכחה פורמלית וקישורה לפעילויות הקודמות – הצגה של המנחה (5 דקות)
6. פונקציות הפוכות לעצמן: משימה המקשרת את מושג הפונקציה ההפוכה והפונקציה המורכבת (10 דקות)
7. אופציית העשרה: שימוש בפונקציה ההפוכה לחישובי אינטגרלים (10 דקות)
8. מה עשינו: סיכום בעזרת המצגת (5 דקות)
9. דיון – (5 דקות)
   מה הערך המוסף של פעילות זו, האם ליישם בכיתה – מה , למי ומתי

<u>ציוד נחוץ:</u>

שקפים ריקים – 3 לכל משתתף , עטי שקפים (רצוי)

סרגלים ודפי דפדפת משובצים

מחשבים בהם מותקנת תכנת הגאוגברה

פירוט מהלך הסדנא:

1. פתיחה במליאה – מטרות הסדנא - **מצגת**
2. משימה ראשונה: **דף עבודה מספר 1**: הפונקציה ההפוכה – עבודה בעזרת שקפים.
כל משתתף יבחר פונקציה המתאימה לו ועליה יבצע את הפעולות שבדף העבודה מתוך הפונקציות: $y = x^n$. $y = x^3$ $y = x^2$, $y = a^x$ $y = e^x$,
$y = tanx$ $y = cosx$ $y = sinx$
3. משימה שניה: **דף עבודה מספר 2** : הפונקציה ההפוכה כשיקוף בישר y=x .
המשתתפים ימשיכו את החקר על הפונקציה שבחרו ועליה יבצע את הפעולות שבדף העבודה.
4. משימה שלישית: **דף עבודה מספר 3** : הנגזרת כשיפוע המשיק – הפונקציה ההפוכה
5. מפגש מונחה : נגזרת הפונקציה ההפוכה כהחלפת תפקידי ה x וה y: קישור המימצאים החזותיים לטכניקות הגזירה המוכרות לנו.
ראה נספח ראשון
6. משימה רביעית : הרחבה והעשרה: **דף פעילות מספר 4** פונקציות הפוכות לעצמן:
   - בעיה שהציגה פרופ' רוזה לייקין
   - מה משותף לפונקציות הפוכות לעצמן: חקר
7. משימה חמישית (משימת העשרה אופציונאלית רק אם יש זמן!): פתרון אינטגרלים בעזרת פונקציה הפוכה (תודה לאנא ועקנין)
8. מפגש מסכם בעזרת **המצגת** . ביסוסים מתמטיים למורה מופיעים בנספח שני

דיון המסכם (הנקודות יופיעו במצגת) :

נבקש להפנות תשומת לב המשתתפים למספר נקודות שניסינו להשיג:

- תהליך הוראה זה מאפשר חזרה והעמקה במושג הפונקציה בהיבטים שונים בתכנית הלימודים. למשל: העמקה בהבנת תחום ההגדרה והטווח של פונקציות השורש בדרגותיהן השונות, הכרת תכונות הפונקציה הלוגריתמית באופן מיידי כפועל יוצא מתכונות הפונקציה המעריכית .
- לכאורה התהליך של הגילוי והחקר של מושג הפונקציה ההפוכה גוזל זמן הוראה אך השימוש בו יכול לחסוך זמן בהמשך.
- ספירליות: מובא כאן כלי עבודה שניתן להשתמש בו מספר פעמים במהלך שלבי ההוראה ובכך ליצור קישוריות בין מושגים והבניית מושג ע"י עיגונו ויצירת ההקשרים בינו למושגים קודמים
- העמקת הבנת מושגים וחשיבותם: למשל דיון בנחיצות מושג הרדיאן. לולא היו צירי ה- x וה- y מוגדרים בסקלות מוחלטות (שזו מהות הרדיאן – יחס), לא ניתן היה לדבר על היפוך הפונקציה.
- העבודה על הפונקציה ההפוכה נותנת הבנה ויזואלית לקשר בין משפחות של פונקציות
- מאפשרת להבין קשרים בין נגזרות של פונקציות .

- ביסוסים מתמטיים מדויקים יותר בנספח שני לקובץ זה

לתשומת לב: חומרים נוספים המרחיבים את הנושא וחלקם מותאמים לכיתות חט"ב מצויים בחומרים שפותחו על ידי מרכז המורים:

קובץ למורה עתודה מדעית טכנולוגית

הרחבת עולם הפונקציות

פיצוח הפוך על הפוך - שאלות מתקדמות על פונקציות הפוכות. מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי, אוניברסיטת חיפה.

- **ביבליוגרפיה:**

- זסלבסקי א.,ויניצקי ג.,(1992) "הוכחות ללא מילים (כמעט)" בתוך:
- http://highmath.haifa.ac.il/data/sadnaot/sadna31.pdf
- פיאז'ה, ז', **(1966), "תפיסת העולם של הילד"**, תרגם אליהו פורת, ספרית פועלים,מרחביה
- פרקינס, ד. (1995). הטכנולוגיה פוגשת בקונסטרוקטיביזם: האם ישתדכו זו לזה. בתוך: חינוך החשיבה. ירושלים: מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize Mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds), Visualization in Teaching and Learning Mathemtics, (pp. 25-37). Providence, RI: MAA Notes Series, Vol. 19.

דף עבודה מס 1

נהפוך אותה – את הפונקציה - עבודה בעזרת שקפים

ציוד נחוץ – שלושה שקפים לכל משתתף, עטים לסימון שקפים במספר צבעים, סרגלים ודפי דפדפת משובצים.

בחרו פונקציה עליה תעבדו:

$$y = x^2 \quad , \quad y = x^3 \quad , \quad y = x^n, \qquad y = e^x \qquad y = a^x,$$

$$y = sinx \qquad y = cosx \quad y = tanx$$

א. קחו שקף ריק. נקרא לו שקף א'. הניחו אותו על דף משובץ. סמנו במרכז השקף הריק מערכת צירים. הקפידו להגדיר את כיוון הצירים ע"י חיצים בקצותיהם. רשמו את שמות הצירים x ו - y בקצוות אלה.

ב. סמנו שנתות על הצירים. הקפידו לשמור על אותו קנה מידה על שני הצירים.

ג. קחו שקף ריק נוסף. נקרא לו שקף ב'. סמנו עליו מערכת צירים זהה ושרטטו עליו (רצוי עם טוש בצבע אחר) את גרף הפונקציה ______________

ד. הרימו את שקף ב' , הפכו וסובבו אותו כך שהחלק החיובי של ציר ה- x "יפול" על החלק החיובי של ציר ה- x בשקף א' והחלק החיובי של ציר ה-y "יפול" על החלק החיובי של ציר ה- x בשקף א'. (הצירים החליפו את תפקידיהם תוך הקפדה על כיוון הצירים. שימו לב שלאחר ה"היפוך סיבוב" הסימון x "נופל" בכיוון ציר ה- y והסימון y "נופל" בכיוון ציר ה- x.

ה. קחו שקף שלישי – שקף ג' והעתיקו עליו את מערכת הצירים ואת העקום החדש שקיבלתם לאחר ה"היפוך סיבוב". סמנו את שמות הצירים x ו- y בכיוונים המקובלים.

ו. האם העקום החדש שקיבלתם הוא גרף של פונקציה? אם כן, אזי קיבלתם את גרף **הפונקציה ההפוכה לפונקציה המקורית** ששרטטת. אם לא, בדקו האם קיים חלק (או חלקים) מן העקום שקיבלת שהם כן פונקציה.

ז. הניחו את שני השקפים שעליהם משורטטת פונקציה, כך שצירי ה- x וה- y יתלכדו. האם אתם מזהים ציר סימטריה נסתר? (ז"א האם ניתן לקפל את השקף כך שגרף אחד "יפול" על השני?).

ח. מלאו את הטבלה שבעמוד הבא לגבי הפונקציה שבחרתם.

	הפונקציה המקורית	**העקום שהתקבל**
תחום ההגדרה (ערכי x אפשריים)		
ערכי y המתקבלים בטווח		
נקודות חיתוך עם הצירים		
נקודות קיצון		
תחום עליה		
תחום ירידה		
אסימפטוטות אנכיות		
אסימפטוטות אופקיות		
האם העקום שהתקבל הוא פונקציה? אם כן – מהי? אם לא – הוסיפו הגבלה על התחום כך שתתקבל פונקציה.		

אילו תובנות הסקתם מתוך הטבלה??

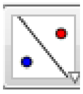
דף עבודה מס 2

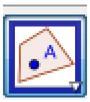
הפונקציה ההפוכה כשיקוף בישר $y=x$

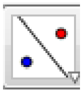
עבודה בעזרת תכנת הגאוגברה

א. הקלידו בחלון הקלט של תכנת הגאוגברה את הפונקציה ____________
(לא חייבים לתת שם לפונקציה – התכנה תעשה זאת)

ב. הקלידו בחלון הקלט y=x כדי לקבל גרף של ישר זה.

ג. בצעו שיקוף הפונקציה ששרטטם בישר y=x בעזרת הכפתור  המסמל שיקוף עצם בישר.
שימו לב: יש ללחוץ קודם כל על כפתור זה ואז להקליק עם העכבר על גרף הפונקציה ואז על ישר השיקוף.

ד. סמנו על גרף הפונקציה הנתונה נקודה כלשהי בעזרת הכפתור  המסמן נקודה על עצם.

ה. בצעו שיקוף של הנקודה שסימנת בעזרת הכפתור 

ו. בדקו בחלון האלגברי מהם קואורדינאטות הנקודה שסימנתם על גרף הפונקציה המקורית, ומהן קואורדינאטות הנקודה שמסומנת בעקום שהתקבל לאחר השיקוף. מה מצאתם?

ז. קיבלתם עקום חדש. האם העקומה שקיבלתם היא פונקציה?

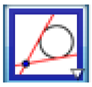
שימו לב מה נרשם בחלון האלגברי כייצוג האלגברי של עקום זה.
(התכנה נתנה לציר ה- y שם חדש *t* וציר ה- x הוא __________). התכנה קראה לעקום החדש "עקומה פרמטרית". מדוע?

דף עבודה מס 3

הנגזרת כשיפוע המשיק – הפונקציה ההפוכה

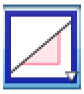
עבודה בעזרת תכנת הגאוגברה

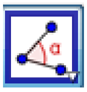
א. בהמשך לדף העבודה - "הפונקציה ההפוכה כשיקוף בישר y=x"

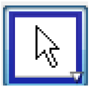
העבירו משיק לגרף הפונקציה המקורית בנקודה שבחרתם על הפונקציה, בעזרת הכפתור (משיקים)

ב. באותה דרך העבירו משיק לגרף העקומה ההפוכה, בנקודה שהתקבלה כשיקוף הנקודה שסימנתם .

ג. לנוחותכם – ניתן להחליף צבעי הפונקציות ו/או המשיקים על ידי הצבעה על העצם המבוקש ועיצוב בשורת התכונות או לחלופין ע"י הצבעה עם הסמן הימני על הגרף המבוקש, בחירה ב"תכונות" ואז בחירה ב"צבע".

ד. בדקו מה השיפוע כל אחד מן המשיקים בעזרת הכפתור שיפוע .
האם גיליתם תופעה מעניינת?

ה. בעזרת כפתור הזווית בדקו מה הזווית שכל אחד מן המשיקים יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה x .שימו לב – כדי לקבל כיוון מדידה נכון עליכם לבחור בכפתור הזווית ואז להצביע קודם על הציר ואז על המשיק.
מה הקשר בין הזוויות? איך קשר זה מתקשר למה שזיהיתם בסעיף הקודם?

ו. גררו את הנקודה שבחרתם על הפונקציה בעזרת חץ הגרירה ובדקו מה קורה לזוויות עם ציר ה x ולשיפועים.

ז. נסו להכליל את תגליותכם.

תהליך הבניה מבוסס על זסלבסקי א., ויניצקי ג.,(1992)

נגזרת הפונקציה ההפוכה כהחלפת תפקידי ה- x וה- y:

קישור המימצאים החזותיים לטכניקות הגזירה המוכרות לנו:

המתמטיקאים נוהגים לטעון : $x'(y)\cdot y'(x)=1$
(הוכחה פורמלית לטענה זו בספר "ללמוד וללמד אנליזה עמ' 262)

מה משמעות טענה מוזרה זו?

נחזור להיפוך תפקידי ציר ה- x ו ציר ה- y. מבחינת המתמטיקאים אפשר להתייחס ל- y כפונקציה של x אך ניתן גם להפוך את היוצרות ולהתייחס ל- x כפונקציה של y. (כמו שעשינו עם השקפים. אלא שאנחנו, אחרי החלפת תפקידי ציר ה- x וה-y , החלפנו לנוחותנו את השמות).

משמעות הטענה הרשומה לעיל היא שהנגזרת של y כפונקציה של x היא ההפכית לנגזרת של x כפונקציה של y (לא החליפו שמות!!)

נבדוק זאת לגבי פונקציות מוכרות:

נתון: $y=x^2$. ידוע לנו כי $y'(x)=2x$ ועל פי טענת המתמטיקאים: $x'(y)=\frac{1}{2x}$

אבל מיהו x על פי הנתון? $x=\sqrt{y}$ ולכן מתקיים: $x'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

עכשיו נחליף שמות כך שהמשתנה שנמצא בתחום ייקרא x והמשתנה שנמצא בטווח ייקרא y כמקובל ונקבל: $y=\sqrt{x}$ ו- $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ וזה אכן משהו שמוכר לנו.

עכשיו נחזור לפעילות שעשינו עם השקפים ובמחשב:

1. כשעבדנו עם השקפים הפכנו וסובבנו והבנו את היפוך תפקידי ציר ה- x וה- y וגם את החלפת השמות.

2. בעבודה במחשב גילינו ששיפוע המשיק לפונקציה בנקודה (s,t) בפונקציה המקורית הופכי לשיפוע המשיק בנקודה (t,s) בפונקציה ההפוכה!

באמצעות המחשה זו ניתן להבין את המשמעות המתמטית של הטענה: $x'(y)\cdot y'(x)=1$

הוכחה מקבילה נוכל להראות לגבי הקשר בין נגזרת הפונקציה המעריכית והלוגריתמית:

נתון: $y=e^x$ ואנו כבר יודעים כי $y'(x)=e^x$. נחפש מה נגזרת הפונקציה ההפוכה.

לפי הטענה לעיל: $x'(y)=\frac{1}{e^x}$, אבל $x=\ln y$ לכן $x'(y)=\frac{1}{e^{\ln y}}$, ז"א $x'(y)=\frac{1}{y}$

נחליף שמות ונקבל שאם: $y=\ln x$ אז $y'(x)=\frac{1}{x}$

דף פעילות מספר 4

פונקציות ההפוכות לעצמן - העשרה

משימות:

1. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{cx}{2x+3}$ מה צריך להיות ערכו של c כדי שהפונקציה תהיה הפוכה לעצמה, דהיינו תקיים $f(f(x))=x$?
לכל x בתחום ההגדרה.

הבעיה הוצגה ע"י פרופ' רוזה לייקין בכנס הערכה מעצבת במכון ויצמן למדע ינואר 2015.

2. נתונות שלוש פונקציות:

א. $f(x)=15-x$

ב. $f(x)=\sqrt[3]{27-x^3}$

ג. $f(x)=\frac{5x+1}{2x-5}$

בדקו עבור כל אחת מן הפונקציות מהי $f(f(x))$?

הסבירו את ממצאכם באופן גרפי ואלגברי.

3. מה צריך לאפיין פונקצית מנה של שתי פונקציות ליניאריות $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ כדי שתהיה הפוכה לעצמה?

פתרונות לדף הפעילות מספר 4 – פונקציות הפוכות לעצמן

1. פתרון אלגברי לבעיה של רוזה:

נציב במקום f את הביטוי המתאים ונקבל משוואה: $x=\dfrac{c\cdot\dfrac{cx}{2x+3}}{2\cdot\dfrac{cx}{2x+3}+3}$

לאחר פישוט המשוואה נגיע למצב:

$$x\cdot(2c+6)=9-c^2 \qquad 2x\cdot(c+3)=(3-c)(3+c)$$

נבדוק מתי ביטוי זה נכון לכל x? זה קורה כאשר הגורם $3+c$ מתאפס ז"א $c=-3$?

<u>בדיקה:</u>

נציב $c=-3$ ונקבל את הפונקציה $y=\dfrac{-3x}{2x+3}$

לאחר העברת אגפים נקבל: $2xy+3y+3x=0$ שהיא פונקציה סימטרית

בתפקידי ה- x וה- y

<u>אבל מהי בעצם המשמעות של</u> $f(f(x))=x$

המשמעות היא שיצאנו מן המקור x עברנו את הפונקציה f ואז הפעלנו עליה שוב את f וקיבלנו חזרה את x. ז"א ש f היא פונקציה שהפוכה לעצמה!

קישור ליישום הממחיש זאת: [פונקציה הפוכה לעצמה – פונקצית מנה של שני ישרים]

הפעל את היישום ובדוק מתי הפונקציה הפוכה לעצמה.

2. פישוט שלוש הפונקציות:
א. $x+y=15$
ב. $x^3+y^3=27$
ג. 2xy-5y-5x=1

פונקציות הפוכות לעצמן: הכללה.

אלגברית	גרפית
$f(f(x))=x$	בהפעלת $f(f(x))$ מתקבל הישר $y=x$
ניתן להביא את התבנית $y=f(x)$ לביטוי "סימטרי" בתפקידי ה- x וה- y	הפונקציה f סימטרית לישר $y=x$

3. הסתכלות "אחרת" על מנת שתי פונקציות ליניאריות $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

- כדי שהפונקציה תהיה הפוכה לעצמה היא צריכה להיות סימטרית לישר $y=x$
- לפונקציה כזו אסימפטוטה אנכית מן הצורה $x=\dfrac{-d}{c}$ ואפקית $y=\dfrac{a}{c}$

פונקצית המנה של שתי פונקציות ליניאריות (היפרבולה) היא סימטרית ביחס לנקודת המפגש של שתי האסימפטוטות.

- בכדי שציר הסימטריה של פונקצית המנה יהיה הישר $y=x$ נזיז את נקודת המפגש של האסימפטוטות לישר זה. זה יקרה כאשר הישר $a=-d$.

בידקו בעצמכם.

יישום הממחיש הסתכלות זו:

[פונקציה רציונאלית הפוכה לעצמה (2).ggb]

והסבר מדויק של רוזה לנושא:

[באילו תנאים פונקציה רציונלית הפוכה לעצמה - רוזה.docx]

דף פעילות מספר 5 - העשרה למעוניינים (תודה לאנא ועקנין על דף פעילות זה)

משימה 1

חשבו את סכום האינטגרלים:

$$\int_0^3 x^2 dx + \int_0^9 \sqrt{x}\, dx =$$

הציעו פתרון בדרכים שונות.

משימה 2

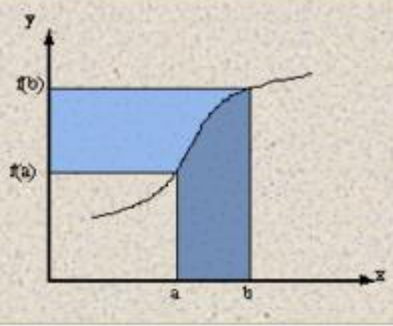
חשבו את סכום האינטגרלים:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln x}\, dx =$$

הציעו פתרון בדרכים שונות.

משימה 3

באחד מספרי הלימוד הישנים מצאנו נוסחה מעניינת ולצידה איור:



$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt + \int_a^b f(x)dx = b \cdot f(b) - a \cdot f(a)$$

התוכלו להסביר את הנוסחה ואת ייחודה?

פתרונות לדף פעילות 5

משימה 1

חשבו את סכום האינטגרלים:

$$\int_0^3 x^2 dx + \int_0^9 \sqrt{x}\, dx =$$

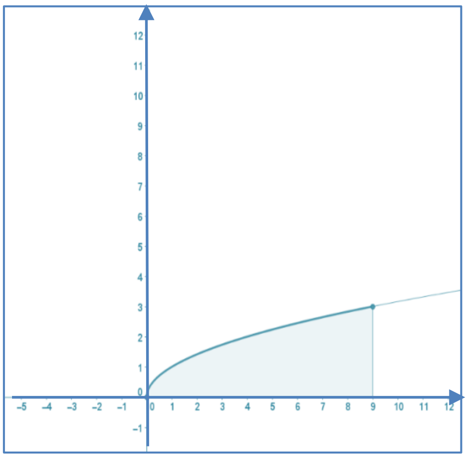
הצעה לפתרון:

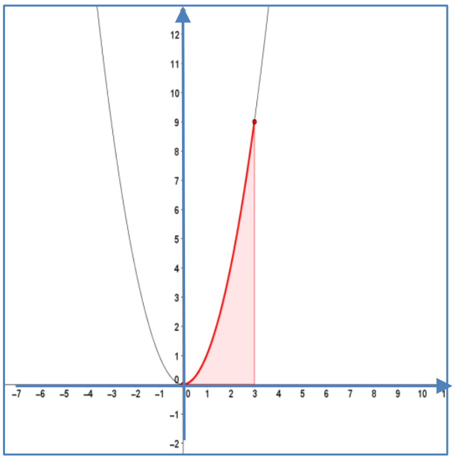
$$\int_0^3 x^2 dx + \int_0^9 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + \left[\frac{x^{1.5}}{1.5}\right]_0^9 = \frac{3^3}{3} - \frac{9^{1.5}}{1.5} = \frac{27}{3} - \frac{27}{1.5} = 9 + 18 = 27$$

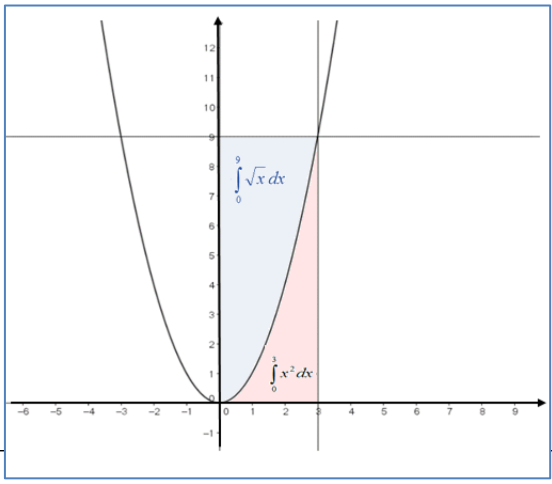
פתרון בעזרת פונקציות הפוכות:

נשים לב כי בשל הסימטריה של הפונקציות ההפוכות והיפוך המשתנים, סכום השטחים יוצר למעשה מלבן.

לקבץ אחת השרטוטים כך שהשטחים יהיו שווים וויזואלי







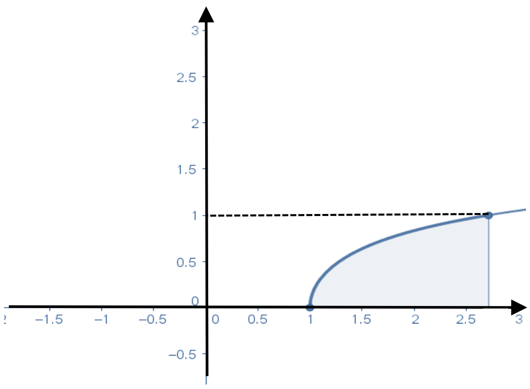
משימה 2

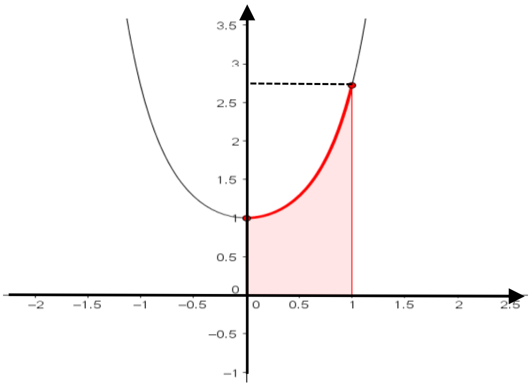
חשבו את סכום האינטגרלים:

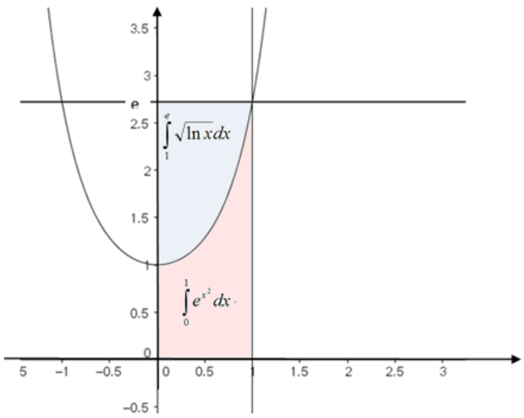
$$\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx=$$

הצעה לפתרון:

אינטגרל זה אינו ניתן לחישוב בדרך ישירה, לכן נשתמש בתכונות הגרפיות של הפונקציות ההפוכות.







הרחבה והוכחות בנושא:

[בפתרונות הפיצוח "הפוך על הפוך"]

נקודות מרכזיות בנושא פונקציות הפוכות

התנאים כדי שפונקציה תהיה הפיכה:

1. כדי שפונקציה תהיה הפיכה נחוצים שני תנאים:
   פונקציה **חד חד ערכית**: לכל אבר בטווח מקור אחד
   היא צריכה להיות **"על"** הטווח – ז"א לקבל כל ערך בטווח
2. פונקציה מונוטונית במובן החזק היא תמיד חד חד ערכית . אם היא גם "על" הטווח היא תמיד תהיה הפיכה.
3. לא כל פונקציה היא הפיכה, למשל הפונקציה הריבועית (או כל חזקה זוגית) , סינוס וקוסינוס ועוד. כדי לייצר "באופן מלאכותי" פונקציות הפוכות מגבילים את תחום הפונקציה ו/או הטווח שלהן. דוגמאות בולטות: הגדרת השורש הריבועי והגדרת פונקציות טריגונומטריות הפוכות.(אמנם תלמידים לא מכירים את הפונקציות ההפוכות באופן פורמלי, אך הם יודעים שמחשבון פשוט נותן תשובה יחידה (לכל איבר בתחום איבר אחד בלבד בטווח)).

תבנית הפונקציה תהיה הפיכה:

מעבר מתבנית פונקציה לתבנית פונקציה הפוכה, נעשה על ידי בידוד ערך x כפונקציה של y (כאשר y הוא ערך הפונקציה המקורית) ואז החלפת שמות המשתנים . לעיתים יש לנו קושי אלגברי במציאת התבנית האלגברית לפונקציה ההפוכה למרות שאנו יודעים שהיא קיימת.

למשל: איננו יודעים למצוא תבנית אלגברית לפונקציה ההפוכה ל- $y = x + x^5$ אך אנו יודעים כי זו פונקציה חד חד ערכית ועל ולכן יש לה פונקציה הפוכה.

הפונקציה ההפוכה סימטרית לישר y=x

הוכחה אלגברית:

- כדי להראות ששתי צורות סימטריות לישר יש להראות שלכל נקודה על אחת הצורות יש נקודה סימטרית על הצורה השניה, כך שהישר הוא אנך אמצעי לקטע המחבר בין הנקודות.
- מהגדרת הפונקציה ההפוכה ראינו שאם $A(k,m)$ היא נקודה על הפונקציה המקורית, אז $B(m,k)$ נמצאת על ההפוכה. מכאן ששיפוע הקטע AB הוא 1-,

ולכן הוא אנך ל- $y=x$. נקודת האמצע של AB היא $\left(\frac{k+m}{2}, \frac{m+k}{2}\right)$ ולכן היא על הישר $y=x$. מכאן ש - $y=x$ אנך אמצעי לקטע AB והנקודות A ו-B סימטריות ביחס אליו.

- <u>הוכחה גיאומטרית</u>:
- הקואורדינאטות הסימטריות של A ו- A' גוררות חפיפות משולשים פשוטות מהן ניתן להוכיח את טענת הסימטריות על פי ההגדרה בה השתמשנו בהוכחה האלגברית.