מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

מן המישור למרחב

חקירה מובנית של בעיה פתוחה

יבגניה גולדברג

אילאיל בורדה

אוניברסיטת חיפה University of Haifa جامعة حيفا

חמ"ה מרכז אינטר-דיסציפלינארי חקר, חינוך, מחוננות והצטיינות

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

THE TRUMP FOUNDATION קרן טראמפ

מבוא

הסדנא בנויה ממספר חלקים. ניתן להשתמש בה אופן ספירלי:

חלק ראשון – **חיבור אמצעי מרובעים במישור** – בעית חקר בעזרת טכנולוגיה.
בפעילות מציעה גם הרחבה לחקר של תהליכים אינסופיים ("בבושקה").

בכיתה ט'-י' ניתן לבצע את חלקה הראשון – מרובעים במישור ולתת "הצצה" לחלק השני – מרובעים במרחב – ברמה אינטואיטיבית – ללא הוכחות.

חלק שני – **חיבור אמצעי צלעות במרובעים במרחב** – הרחבה של בעית החקר למרחב תוך שימוש בהמחשות ובטכנולוגיה.
בכיתה י"ב ניתן לעבור על הסדנא בשלמותה.

מטרות הסדנא:

- פיתוח ראיה מרחבית
- פיתוח אסטרטגיות התמודדות עם בעיות פתוחות
- העלאת השערות והוכחתן
- חשיפת תלמידים לתהליכים אינסופיים כבר בשלב מוקדם של הלימודים (ט'-י') וחזרה אליהם בכיתות הגבוהות

- הבהרת מושגים מתמטיים: תנאי הכרחי ומספיק, אם ורק אם
- פיתרון בעיות בדרכים שונות
- חשיפת הילדים לאלמנט ההפתעה והאסטטיקה בתופעות מתמטיות.

תחום הדעת: גיאומטריה ו/או וקטורים במישור ובמרחב, סדרות. ניתן לשלב גם גיאומטריה אנליטית.

מהלך הסדנה בקהילה

חלק ראשון – **מרובעים במישור**

1. חיבור אמצעי צלעות במרובע במישור: דף עבודה (20 דקות)
2. הצגת פתרונות במליאה לסעיפים "המעניינים" בדף , וניתוח אסטרטגיות הפתרון לשאלות הפתוחות (10 דקות)

חלק שני – **חיבור אמצעי צלעות במרובעים במרחב**

במליאה:

1. מצגת של מטח מתוך האתגר 5 בנושא – צפיה דינמית בשילוב דגם 1 (ראה פעילות שניה בהמשך) (10 דקות)
2. מרובע בתוך תיבה – הצגת דגם 2 (ראה פעילות שלישית בהמשך) (5 דקות)
3. "מרובע בתוך תיבה" ע"ע בקבוצות על שאלה 1 בדף העבודה (דרך א' ודרך ב') לכל קבוצה תינתן משימה לפתור בדרך אחת (5 דקות)
4. הצגת המשימות והפתרונות פתרונות במליאה לפי הסדר שמופיעים בדף העבודה. (10 דקות)
5. במליאה טיפול בשאלה 2. בדף העבודה (מהו התנאי כדי שיתקבל ריבוע). ניתן להיעזר ביישום "תיבה במערכת צירים עם חיבור אלכסונים" ובשאלה 3 (מהו התנאי כדי שתתקבל מקבילית). ניתן להעזר ביישום "מינסרה שבבסיסה מקבילית חיבור אמצעי צלעות" (10 דקות)
6. דיון באסטרטגיות פתרון הבעיות הפתוחות אם נותר זמן.

הנחיות והמלצות

א. מבנה הסדנא הוא כזה שניתן לעסוק בחלקים ממנה. בדף העבודה "אמצעי צלעות במרובע" שתי משימות מרכזיות. הראשונה (סעיפים א.-ז.) עוסקת בצורות שנוצרות כאשר מחברים אמצעי צלעות במרובע. השניה עוסקת ביחסי שטחים ובסכומי שטחים חסומים.

ב. השאלות המעניינות בסדנא הן:

1. מתי ייווצר מלבן, מתי ייווצר מעוין (במישור ובמרחב) וכו'. התשובות האינטואיטיביות הן לחפש מרובעים (בשלב העבודה במישור) או מינסרות מוכרות (בשלב המרחב) כתשובה ולא כך הדבר. זה מזמן את הדיון המתמטי על הפתרון עצמו, על תנאי הכרחי ומספיק ועל אסטרטגית הפתרון לשאלות פתוחות כאלה.
2. שאלות ה"בבושקה" הן למעשה הקדמה לנושא סידרה הנדסית אינסופית אך מובאות בצורה חוויתית ומפתיעה. ניתן לעסוק בשאלות אלה גם עם תלמידים צעירים ללא הוכחה פורמלית ו/או שימוש בנוסחאות.

תקציר הפעילות

הפעילות עוסקת במרובעים הנוצרים על ידי חיבור אמצעי צלעות בצורות שונות במישור ובמרחב ומשלבת גם חישובי שטחים ונפחים של הצורות והגופים שנוצרים.

העבודה נעשית בדרך של השערת השערות (רצוי להסתייע בגאוגברה) ובדיקתן או הפרכתן באופן פורמלי בדרכים שונות.

פעילות ראשונה – אמצעי צלעות במרובע

1. עבדו על דף העבודה "אמצעי צלעות במרובע" סעיפים א-ז – לנוחותכם- הסתייעו בתוכנת הגאוגברה – עבודה בזוגות
שימו לב: בדף מתבקשים התלמידים להזיז את קודקודי המרובע המקורי כך שיתקבלו מרובעים שונים. לא צריך לדרוש בניה נפרדת לכל צורה אלא להסתמך על התבוננות. ניתן להסתכל בחלון האלגברי ולראות את אורכי הצלעות שמתקבלות בהזזה. תלמידים מיומנים בגאוגברה יכולים להוסיף גם מדידת זויות, אבל לא הכרחי. המטרה בשלבים הראשונים היא העלאת השערות. הוכחות פורמליות רק בהמשך.
2. במליאה:
   א. ספרו על מסקנותיכם
   ב. תארו את אסטרטגית החיפוש שלכם
   דיון בשאלה מה ניתן ללמוד על התמודדות עם שאלות פתוחות מפעילות זו (נקודות מרכזיות אפשריות ראה בדף הפתרונות)
3. פעילות אופציונלית: משימה שניה בדף "אמצעי צלעות במרובע" . בסעיף ג. במשימה זו חקר בעזרת היישום "בבושקה במישור" (סכום שטחים של סדרת מרובעים חסומים)

פעילות שניה –ישרים מצטלבים

פתיחה: הצגת דגם גמיש (נקרא לו דגם 1) של מרובע שצלעותיו ניתנות להזזה (ליצירת צלעות נגדיות מצטלבות) וחוט מחבר את אמצעיהן:

הנחיות להכנת הדגם (למנחים):

- צור מרובע ששתים מצלעותיו הם שני מוטות והשתים האחרות הם שני שרוכים , באופן שצלעות המרובע ניתנות להזזה לכל כיוון.
- הנח חוט גומי (כמו של תופרות...) באופן שיעבור דרך אמצעי הצלעות במרובע שיצרת (ראה צילום)

עכשיו ניתן להזיז את צלעות המרובע החיצוני ולבחון מה קורה לחוט היוצר את המרובע הפנימי.

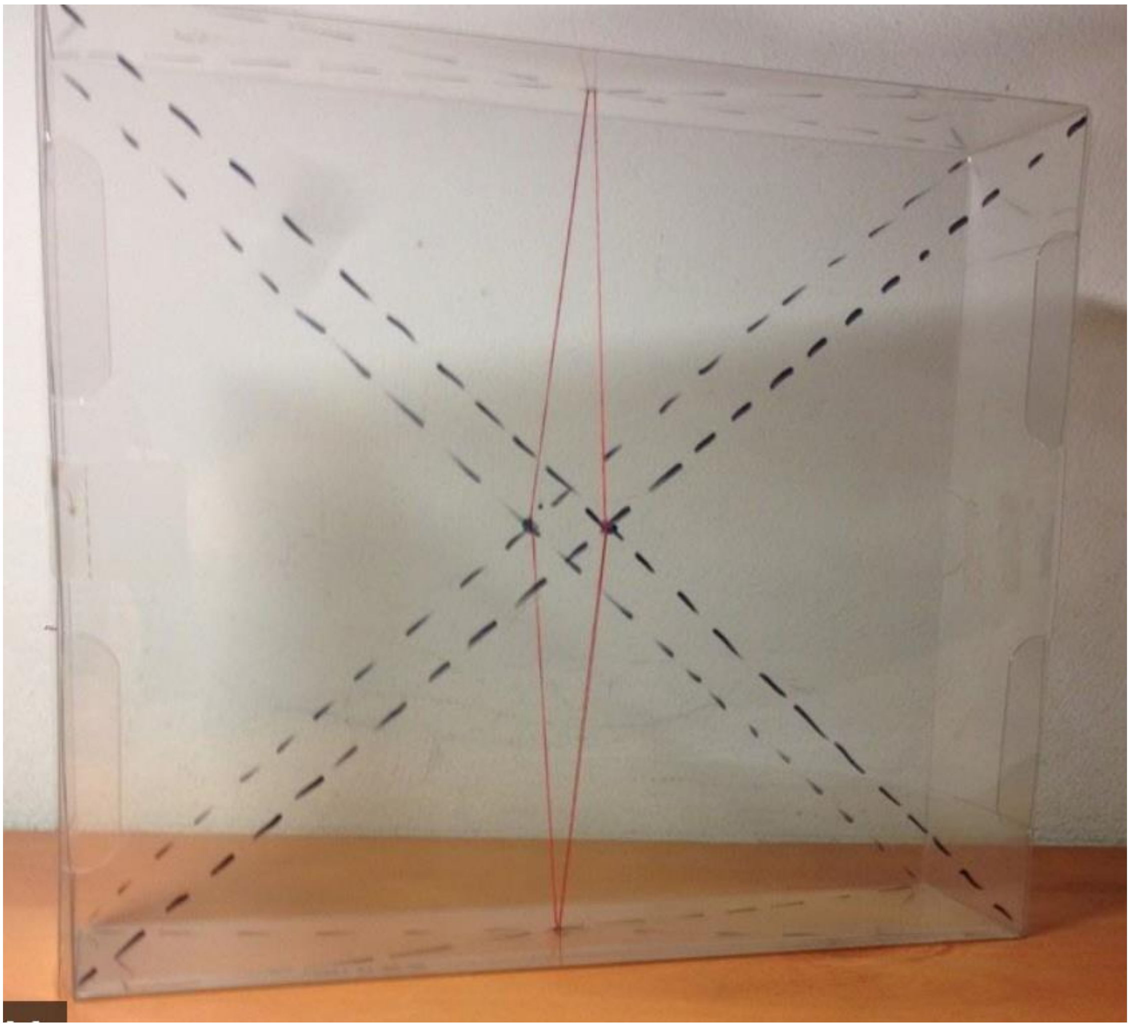
שאלה במליאה: מה לדעתכם הצורה המתקבלת.

העלאת השערות במליאה.

המשך: לפי המצגת הוכחות גאומטריות במרחב, והמשימה "מרובעים במרחב" של מט"ח (לקוחה מתוך מצגות האתגר 5)

פעילות שלישית – מרובעים במרחב

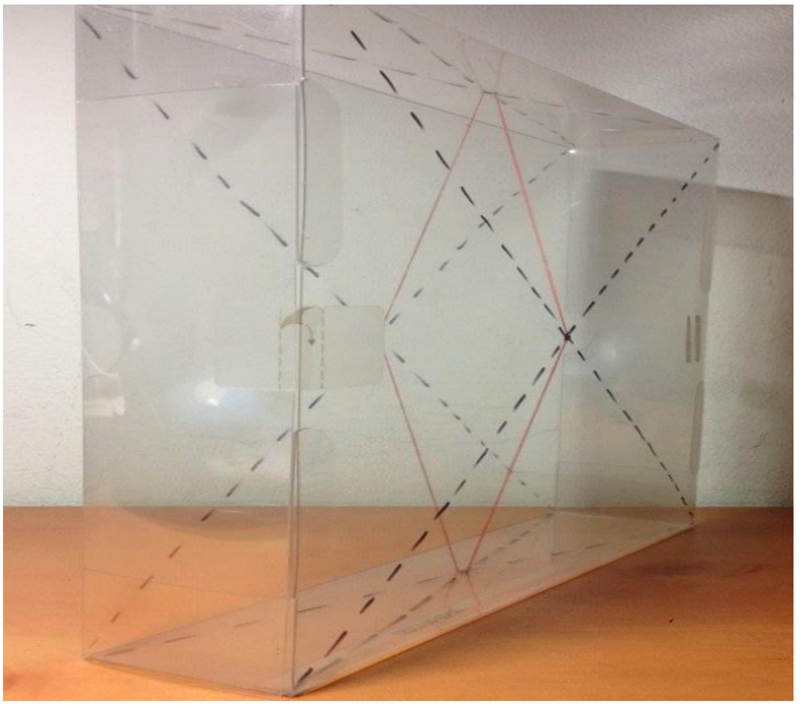
1. הצגת דגם מוכן (או אופציה טובה פחות – הצגת התמונות להלן):

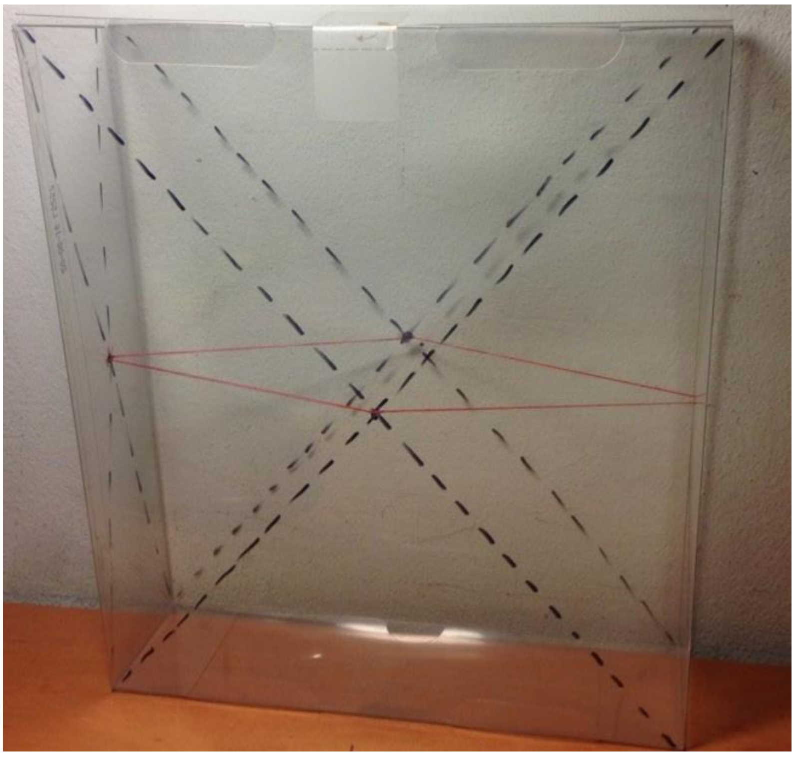


הנחיות להכנת הדגם:

השתמשו בקופסת פלסטיק שקופה (אריזה של מוצר כלשהו), שרטטו את האלכסונים על 2 זוגות של פאות נגדיות, חברו בעזרת חוט ומחט את נקודות מפגש האלכסונים (ראו דגם מצולם)

אפשר לבקש מהתלמידים לבנות את הדגמים.





השאלה:

מה המרובע שנוצר בדרך זו?

2. "מרובע בתוך מנסרה " – חקר בעזרת היישום "תיבה ומרובע מרכזי האלכסונים" לבדוק מה המרובעים שנוצרים ומתי.

3. עבודה על דפי העבודה "מרובע בתוך תיבה". בסעיף 1. נתחלק לקבוצות כאשר חלקן תפתורנה בדרך א. וחלקן בדרך ב. (רק מטעמי חיסכון בזמן).

במליאה טיפול בשאלה 2. (מהו התנאי כדי שיתקבל ריבוע).
ניתן להיעזר ביישום "תיבה ומרובע מרכזי האלכסונים"
במליאה טיפול בשאלה 3 (מהו התנאי כדי שתתקבל מקבילית).
ניתן להיעזר ביישום "מנסרה שבסיסה מקבילית חיבור מפגש האלכסונים"

פעילות רביעית: בבושקה במרחב

הקדמה:
בכיתות חשוב שפעילות זו תעשה לאחר הפעלת הפעילות "בבושקה 1" על שטחים במישור.

הפעילות:
מראיאת היישום "בבושקה במרחב". ביישום רואים סדרת פירמידות החסומות אחת בתוך השניה כאשר קודקוד הראש נשמר קבוע וקודקודי הבסיסים של כל פירמידה נוצרים על ידי אמצעי הצלעות של מרובע הבסיס החוסם אותה.

שאלת חקר:
מצא קשר בין נפח הפירמידה החיצונית לנפח הפירמידות החסומות בתוכה.

הצעה לפתרונות
תשובות לדף העבודה "אמצעי צלעות במרובע"

למשימה הראשונה בדף:

בסעיפים א'-ו' בדף הכל ברמת השערות.
אמורים לזהות מהסתכלות שתמיד יוצאת מקבילית. ניתן להעזר בחלון האלגברי בו מופיעים אורכי הצלעות כדי להשתכנע שאכן זו מקבילית.

התוצאות הנכונות בטבלה הן:

ב. בדוק מה קורה כאשר מחברים אמצעי צלעות בצורות הבאות :

מרובע מקורי	מרובע שהתקבל
מקבילית	מקבילית
מלבן	מעוין
מעוין	מלבן
ריבוע	ריבוע
דלתון	מלבן
טרפז כלשהו	מקבילית
טרפז שווה שוקיים	מעוין

הוכחות הטענות:

א. אם מחברים זה אחר זה אמצעי צלעות במרובע כלשהו מתקבלת מקבילית.

ההוכחה מיידית בעזרת העברת אלכסון/שני אלכסונים במרובע המקורי שימוש המשפט קטע האמצעים במשולש.

ניתן כמובן להוכיח בדרכים נוספות (ווקטורים,הנדסה אנליטית)

ב. את הטענות בטבלה ניתן להוכיח או בעזרת קטע אמצעים (ואז זה מיידי) או בעזרת חפיפות.

ג. התשובה הכללית היא:

כדי שייווצר מעוין אלכסוני המרובע המקורי צריכים להיות שווים

כדי שייווצר מלבן אלכסוני המרובע המקורי צריכים להיות אנכים

כדי לקבל ריבוע צריכים כמובן שני התנאים להתקיים בו זמנית

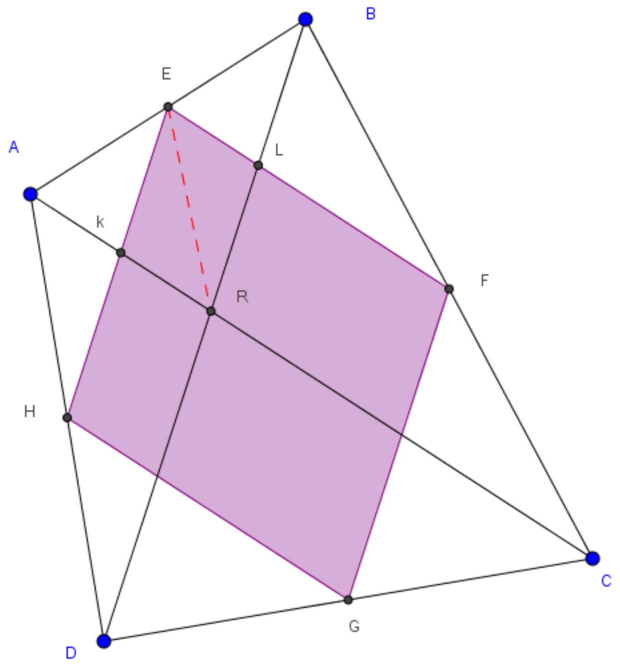
הערה למנחים:

בהפעלת פעילות זו בכיתה סביר שתלמידים "ייתפסו" לצורות המוכרות ולא יגיעו להכללה בעצמם. כדאי לבדוק נכונות התשובות שלהם כדי לעודד ורק אז לעבור להכללה.

למשימה השניה בדף:

יחס השטחים המתקבל הוא 1:2. ניתן להוכיח זאת בדרכים שונות.

הדרך הפשוטה: תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח.



במשולש ABR העברנו תיכון RE שחילק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.

HE קטע אמצעים במשולש ABD, לכן HE מקביל ל DB.

לפי המשפט ההפוך לקטע אמצעים במשולש ARB הנקודה K היא אמצע AR, ולכן שטח המשולש KAE שווה לשטח המשולש KER.

באותה דרך ששטח REL שווה לשטח משולש ELB.

מכאן יחסי השטחים בין KELR לבין המשולש ABR הוא 1:2.

באותו אופן נמצא את היחסים בין שאר המקביליות לשאר המשולשים ונראה שיחס השטחים בין שטח המקבילית החסומה למרובע המקורי הוא 1:2.

דרכים נוספות למציאת יחסי השטחים: יחס שטחים במשולשים דומים, טריגו וכו'.

למשימה השניה סעיף ג. (אתגר):

הבעיה:

אתגר: אם נמשיך לחבר את אמצעי הצלעות גם במרובע הפנימי, ואחר כך במרובע שבתוכו וכן הלאה בלי סוף מה יהיה הקשר בין סכום השטחים של המרובעים הפנימיים לשטח המרובע המקורי

הפעילות מתבצעת בעזרת היישום "בבושקה 1"

כדי לעקוב אחר השטחים של המרובעים השונים ניתן לעקוב אחר הגדלים "poly" של המקביליות בסדר ההולך וקטן בחלון האלגברי.

יש לבקש מן המשתתפים לחבר את השטחים הרשומים.

המסקנה אליה אנחנו שואפים:

סכום השטחים של כל המקביליות הפנימיות "שואף" לשטח המרובע החיצוני.

$\frac{1}{2}S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{8}S+\frac{1}{16}S.........=S$

פעילות זו מתקשרת לנושא סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת. בכיתות ט'-י' פעילות זו תהיה בבחינת "שלח לחמך על פני המים ברבות הימים תמצאנו" . אם מפעילים בכיתות גבוהות יותר אפשר לקשר לנושא הסדרות.

הפעלת הפעילות בי"ב:

בכיתה י"ב ניתןלהשתמש בפעילות זו עם הדגש לפתרונות בדרכים שונות ולהוכיח את הטענות בעזרת הכלים שקיבלו בי"ב (נוח בווקטורים).

לפעילות שניה פעילות במרחב (דגם ומצגת):

בשלב א' מתבקשים לשער על ידי התבוננות בדגם ורואים שגם במרחב, כאשר מחברים אמצעי צלעות ב"מרובע שבור" (מרובע ששני הזוגות של הצלעות הנגדיות שלו מצטלבות) נוצרת מקבילית. (אם אין לכם דגם היעזרו בתמונות שבסוף המצגת)

כאן משתלבת המצגת בפעילות וההוכחה לכך שהצורה שמתקבלת היא מקבילית מופיעה במצגת.

המצגת מסתיימת בבקשה להשערה מה קורה כאשר מחברים את נקודות חיתוך האלכסונים בשני זוגות של פאות נגדיות בתיבה.

סביר שההשערה הראשונית תהיה שנוצרת מקבילית. למעשה ניתן להוכיח שנוצר מעוין, לא "נגלה" זאת למשתתפים בשלב זה, אלא נעבור לפעילות השלישית שמתחילה בהצגת הדגם.

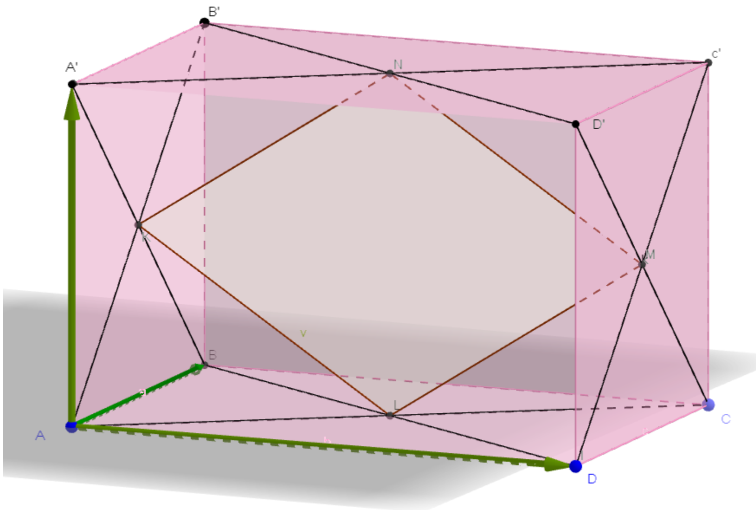
לפעילות שלישית "מרובע בתוך תיבה":

בהצגת הדגם חשוב להיות מודעים לכך שהמרובע החסום הוא מעוין (יתכן שישערו רק שזו מקבילית). ההוכחה בעבודה על הפעילות "מרובע בתוך תיבה".

תשובות לפעילות בדף "מרובע בתוך תיבה":

לפעילות 1.

מה המרובע שמתקבל כאשר מחברים אמצעי שני זוגות פאות נגדיות בתיבה? אינטואיטיבית רואים שמתקבלת מקבילית. קצת קשה יותר לזהות שזה מעוין ולזה נועדה ההוכחה.



<u>דרך א': וקטורים גיאומטריים:</u>

KL קטע אמצעים ב B'AC

$\overrightarrow{KL} = 0.5\ \overrightarrow{B'C}$

$\overrightarrow{B'C}$ =-<u>w</u>+<u>v</u>

$\overrightarrow{KL}$ =0.5 <u>v</u> – 0.5<u>w</u>

NM קטע אמצעים במשולש B'D'C

$\overrightarrow{NM}$ =0.5 $\overrightarrow{B'C}$= 0.5<u>v</u>-0.5<u>w</u>

מצאנו זוג צלעות מקבילות ושוות ולכן המרובע הוא מקבילית.

נוכיח עכשיו שבמקבילית שקיבלנו זוג צלעות סמוכות שוות (ז"א שהיא מעוין):

KN קטע אמצעים במשולש ' A D'B

$\vec{KN}=0.5\vec{AD'}=0.5\underline{v}+0.5\underline{w}$

נוכיח ש KN=KL

$|\vec{KL}|=\sqrt{(0.5(v-w))^2}$

בזכות העובדה ש $\underline{v}$ ו $\underline{w}$ אנכים ומכפלתם הסקלרית אפס נקבל לבסוף :

$|\vec{KL}|=\frac{\sqrt{|v|^2+|w|^2}}{2}$

$|\vec{KN}|=\sqrt{(0.5(v+w))^2}$

וגם כאן נקבל:

$|\vec{KN}|=\frac{\sqrt{|v|^2+|w|^2}}{2}$

לכן KN=KL ו KNML מעוין.

<u>לשאלה 2:</u>

איזה תנאי צריך להתקיים כדי שהמרובע שיתקבל יהיה ריבוע?

התשובה האינטואיטיבית היא שריבוע מתקבל כאשר הגוף החוסם הוא קוביה. למעשה מספיק שזוג אחד של פאות (המקבילות למישור המעוין) יהיו ריבועים כדי שייוצר ריבוע.

ההסבר:

כדי שהמרובע יהפוך לריבוע צריך ש:

$\vec{KN}*\vec{KL}=0$

$(0.5\underline{v}-0.5\underline{w})*(0.5\underline{v}+0.5\underline{w})=$

לאחר איפוס המכפלות ששוות אפס ל:

$0.25\underline{v}^2-0.25\underline{w}^2=0$

ולכן כאשר $\underline{v}$ ו $\underline{w}$ שווים באורכם ADD'A' וגם BCC'B' ריבועים.

שימו לב שאורכו של הווקטור $\underline{u}$ כלל לא השפיע על ההוכחה!!

<u>דרך ב': ווקטורים אלגבריים</u>:

נסמן:

AB=2a

AD=2b

AA'=2c

D'(2a,2b,2c) ,C'(0,2b,2c) ,B'(0,0,2c) ,A'(2a,0,2c) ,D(2a,2b,0) , C (0,2b,0) , , B(0,0,0) ,A(2a,0,0)

$\underset{km}{\rightarrow}$ =(0,b, -c)

$\underset{kl}{\rightarrow}$ =(0,b, -c)

$\underset{lm}{\rightarrow}$ =(0,b, c)

ומקבלים:

אורכי NM, LM, KL כולם: $\sqrt{b2+c2}$ ולכן KNML מעוין.

2. כדי ש KNML יהיה ריבוע צריך ש: $\underset{kl}{\rightarrow}*\underset{km}{\rightarrow} = 0$

$(0,b,c)(0,b,-c)=b^2-bc+bc-c^2=b^2-c^2$

וכדי שביטוי זה יתאפס נדרש ש:

b=c

גם כאן רואים ש a (במקרה זה גובה התיבה) לא משפיע. מספיק ש ADD'A' ו BCC'B' יהיו ריבועים.

למשימות הנוספות:

משימות אלה עוסקות בנפחים.

מטרת פעילות זו להגיע למסקנה שיחס הנפחים בין הפאון הפנימי לתיבה הוא 1:6.

בדף הפעילות אנו עוסקים במקרה פרטי. הוכחה קצרה ויפה למקרה הכללי מצורפת בהמשך.

<u>פתרונות לפעילויות נוספות</u>

4. נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D.

נתון: B(0,0,0),D'(4,6,8) .

א) מצא את שטח של מרובע MNKL ? נמק!

פתרון:

B(0,0,0),

A(4,0,0),

C(0,6,0),

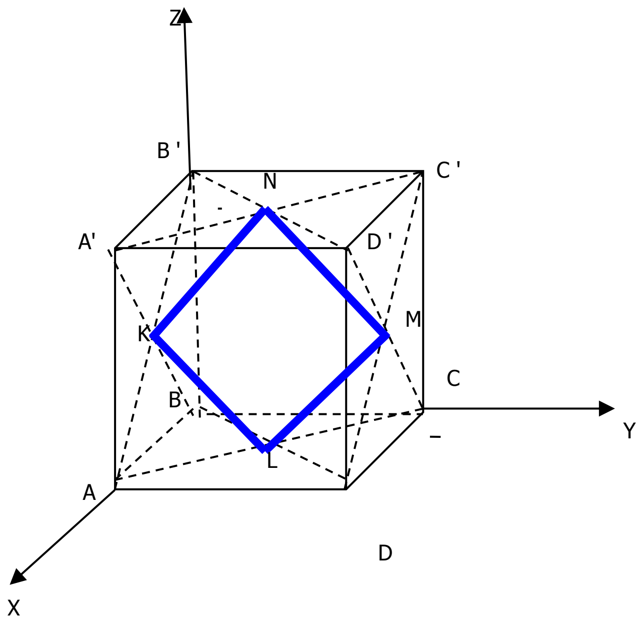
D(4,6,0),

A`(4,0,8),

B`(0,0,8),

C`(0,6,8)

D`(4,6,8)



הוכחנו שמרובע MNKL -מעויין

$$S_{MNKL}=\frac{KM\cdot NL}{2}$$

מחשבים שעורי נקודות מפגש של אלכסונים (אמצע קטע)

K(2,0,4),N(2,3,8),M(2,6,4),L(2,3,0)

מחשבים את אורכי האלכסונים של המעוין :

$$KM=\sqrt{(2-2)^2+(0-6)^2+(4-4)^2}=6$$
$$LN=\sqrt{(2-2)^2+(3-3)^2+((8-0)^2}=8$$

$$S_{MNKL}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$$

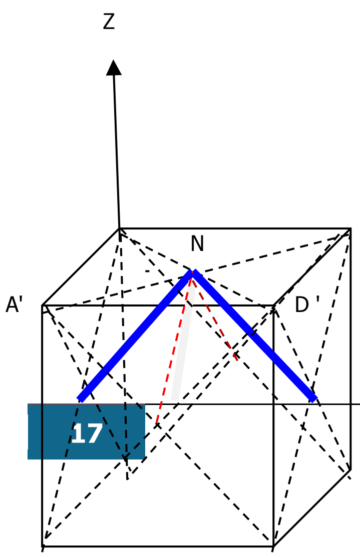
(אפשר לחשב שטח של מעוין בעזרת בניה של חתך של תיבה-מישור KNM,חתך הוא מלבן חופף למלבניםADD'A' ,BCC'B' ומידותיו 8x4)

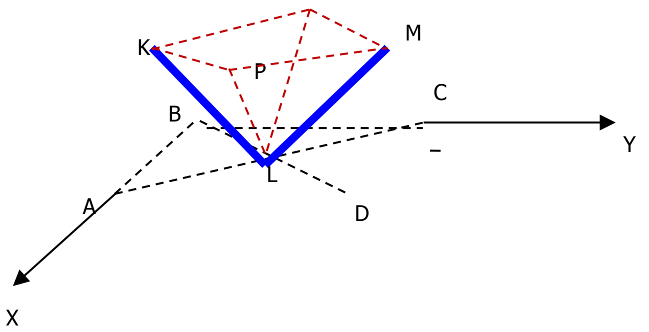
ב)נתון: נקודות O ו-P הן נקודות חיתוך של אלכסונים של שתי פאות צדדיות ADD'A' ו-CBB'C' של התיבה. מצא את נפח הפאון OMNKLP.

פתרון:

פאון OMNKLP מורכב משתי פירמידות MNKLP ו OMNKL.

פירמידות זהות לכן יש להן נפחים שווים,גבהים שווים ו בסיס משותף מעוין MNKL .





$$h=\frac{AB}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$V_{\text{OMNKL}}=V_{\text{MNKLP}}=\frac{24\cdot 2}{3}=16$$

$$V_{\text{OMNKLP}}=16\cdot 2=32$$

אפשר לראות שהיחס בין נפח תיבה לנפח פאון הוא 6:1

$$h=\frac{AB}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$V_{\text{ABCDA'B'C'D}}=4\cdot 6\cdot 8$$

$$V_{\text{OMNKLP}}=32$$

$$\frac{V_{\text{ABCDA'B'C'D}}}{V_{\text{OMNKLP}}}=\frac{4\cdot 6\cdot 8}{32}=6$$

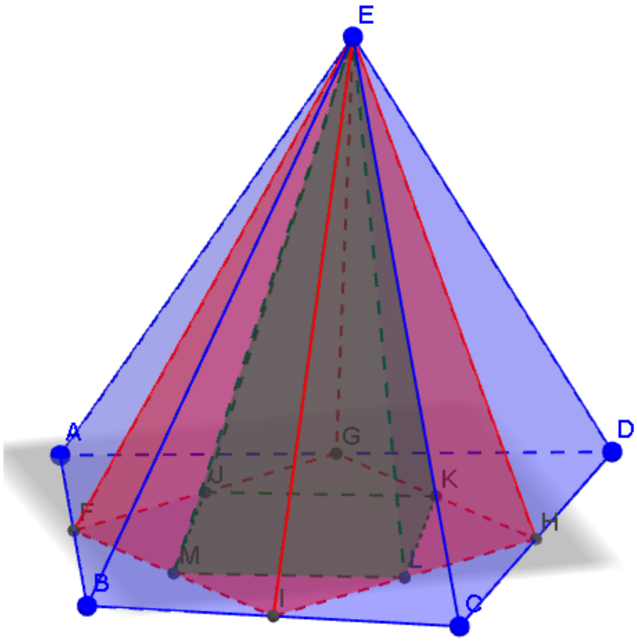
פתרונות לאתגר בבושקה 2

אתגר "בבושקה 2":

נתונה פירמידה שבסיסה מרובע כלשהו. מחברים את אמצעי צלעות הבסיס ויוצרים פירמידה חדשה שבסיס המרובע החדש וקודקוד הראש שלה משותף לפירמידה המקורית.

חוזרים על התהליך אינסוף פעמים.

שער למה שואף סכום הנפחים של הפירמידות החסומות.
העזר במסקנותיך בפעילות "בבושקה במישור".



לכל הפירמידות החסומות גובה משותף. שטח כל בסיס פנימי הוא מחצית משטח המרובע כולא אותו (ראה "בבושקה 1"). לכן נפח כל פירמידה הוא מחצית נפח הפירמידה הכולאת אותה.

סכום נפחי הפירמידות החסומות בפירמידה המקורית מתכנס לנפחה**.**

נספח

אפשרות להרחבה לפעילות להערכה חלופית:

שאילת שאלות נוספות על ידי התלמידים – קשרים מעניינים ותופעות נוספות.

למשל:

ביישום "בבושקה במישור" ניתן לזהות שחלק מן הנקודות מסתדרות על אותו ישר. מתי ולמה????

מקורות:

האתגר 5