מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

טעות של תלמיד –

מנוף ללמידה מעמיקה

שקילות כמשל

יהלומית רוזנברג

רינה זבודניק

THE TRUMP FOUNDATION
קרן טראמפ

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

המركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

חמ"ה
מרכז אינטר-דיסציפלינארי
חקר, חינוך, מחוננות והצטיינות

אוניברסיטת חיפה
University of Haifa
جامعة حيفا

מבוא

משימה זו מדגימה את הצורך בשימוש מדויק בכלים אלגבריים. המשימה עשויה לתרום למורים לחדד את המושגים לעצמם ולתלמידים, להסביר את הסוגיה בדרכים שונות.

השאלה בעלת עצמה מתמטית, פדגוגית וחינוכית.

מושגים מתמטיים המופיעים במשימה: שקילות, פונקציה, פונקציה סתומה, פונקציית שורש, נקודות חיתוך בין גרפים של פונקציות, אסימפטוטות אופקיות, היפרבולה לא קנונית, תבניות נגדיות, פתרון "מתחזה", פסוק שקר, פסוק אמת, מושגים שקשורים לקבוצות. במשימה זו יש שימוש רחב בשפה מתמטית, מגוון מושגים, מגוון ייצוגים – אלגבריים וגראפיים.

בסוגיה המוצגת נדרש ידע של מורים בתחומים שונים:

- ידע פדגוגי – להתחבר בהסבר לידע הקיים אצל התלמיד ולהוביל את התלמיד לפתרון ברמת הידע שלו. להסביר רעיון מורכב בעזרת דוגמאות פשוטות יותר (לדוגמא: פירוק לשתי מערכות, פישוט הבעיה).
- ידע קליקולרי – פתרון הבעיה בעזרת נושא לא בתכנית הלימודים (ההסבר בעזרת היפרבולה לא קנונית). הסבר כזה יכול לאתגר תלמידים חזקים, להצביע על אופק בלימודי עתיד.
- ידע של לומדים ומאפייניהם – הדיון נבנה סביב טעות של תלמידה, על בסיס הבנת הקשיים של התלמידים בניסיון להתחבר לצורת החשיבה שלהם, ליישב את הקונפליקט שנוצר. הצעות שונות להסברים עבור תלמידים שונים.
- שילוב טכנולוגיה – שימוש בייצוגים גרפים בעזרת תוכנות גרפיות זמינות.
- ידע מתמטי מתקדם – ידע מתמטי מתקדם לא נדרש במשימה זו, אבל נדרשת הבנה מעמיקה של מושגים, הקשר בין המושגים, מעבר בין ייצוגים שונים.

מהלך הסדנה

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות, חזרה על שיטות לפתרון מערכות - אופציונלי. (10 דקות)
2. הצגת הבעיה. (5 דקות)
3. עבודה עצמאית ובקבוצות. (10 -15 דקות)
4. הצגת הפתרונות שונים. (15 דקות)
5. דיון ומסקנות. (10 דקות)

הנחיות והמלצות

השאלה ניתנה במבחן תחילת השנה לתלמידי כיתה י', 4-5 יח"ל במטרה לבדוק שליטה בטכניקות אלגבריות.

אפשר להציג את המערכת ופתרונות של שני התלמידים או לאפשר למורים/תלמידים לפתור את המערכת ולאחר מכן "לשלוף" את הפתרון של מיכל.

יש ללוות את ההסבר בהדגמות של גרפים בתוכנות desmos או geogebra

הצגת הבעיה

א. פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases} 2xy + y^2 - 40 = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

ב. להלן פתרונות של שני תלמידים:

הדרך של דני

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 40 = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 40 = 0 \\ y = 10 - 2x \end{cases}$$

$$2x(10 - 2x) + (10 - 2x)^2 - 40 = 0$$
$$20x - 4x^2 - 100 - 40x + 4x^2 - 40 = 0$$
$$-20x = -60$$
$$x = 3$$

דני הציב במשוואה <u>השנייה</u>:

$$y = 10 - 2 \cdot 3$$

$$y = 4$$

הפתרון של דני : $(3,4)$

הדרך של מיכל

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 40 = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - 40 = 0 \\ y = 10 - 2x \end{cases}$$

$$2x(10-2x) + (10-2x)^2 - 40 = 0$$
$$20x - 4x^2 - 100 - 40x + 4x^2 - 40 = 0$$
$$-20x = -60$$
$$x = 3$$

מיכל הציבה במשוואה <u>הראשונה</u>:

$$2 \cdot 3y + y^2 - 40 = 0$$
$$y^2 + 6y - 40 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1}$$

$y_1 = 4$ או $y_2 = -10$

הפתרונות של מיכל הם: $(3,4)$ ו- $(3,-10)$. מיכל קיבלה פתרון נוסף!

שאלות לדיון

1. מי מהתלמידים צודק?
2. מה הסיבה להבדל בין הפתרונות?
3. הציעו דרכים שונות ליישב את הבעיה.
4. מהם אמצעי הזהירות שעל התלמידים לנקוט על מנת לא "לפול בפח"?
5. מה עוד אפשר ללמוד מהשאלה?

הצעות לפתרונות

ראשית, נתבונן בפתרון של מיכל:

הצבת הפתרון הנוסף של מיכל במשוואה השנייה לצורך בדיקה מראה כי זהו פתרון "מתחזה", אינו פתרון:

$$-10 = 10 - 2 \cdot 3$$

$-10 = 4$ פסוק שקר!

אנו לא נוהגים ולא מדגישים את הצורך בבדיקת פתרונות במשוואות בהן אין "בעיות" מיוחדות, כגון שורשים, לוגריתמים, שברים...

מה המוטיבציה לבדיקת התשובה? מדוע נוסף פתרון בכלל?

הסבר ראשון

נדגיש את החשיבות של מעבר בין מערכת משוואות נתונה למערכת משוואות שקולה.

התלמידה מיכל עברה למערכת משוואות לא שקולה ועל כן קיבלה פתרון נוסף.

המערכת המקורית
$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 40 = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

שקולה למערכת "או" של שתי מערכות "וגם":

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 10 \Rightarrow (3,4) \\ y = 4 \end{cases}$$

או

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 10 \Rightarrow \quad \emptyset \\ y = -10 \end{cases}$$

הסבר שני

ננסה להבין את משמעות הפתרון הנוסף, במקום "בלתי צפוי":

המשוואה $2x+y=10$ היא משוואת ישר, איתה הכל ברור.

אך מה מתארת המשוואה $2xy+y^2-40=0$? היא פונקציה סתומה, ננסה לפרש את y.

נסדר את המשוואה כמשוואה ריבועית עבור y, נתייחס לאל x כאל פרמטר ונבודד את y:

$$y^2+2xy-40=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-2x\pm\sqrt{4x^2+160}}{2}$$

$$y_{1,2}=x\pm\sqrt{x^2+40}$$

כלומר, קיבלנו שתי פונקציות שורש שמוגדרות ב- R: $y_1=x+\sqrt{x^2+40}$ או $y_2=x-\sqrt{x^2+40}$

המשך בעמוד הבא:

ולכן המערכת המקורית שקולה למערכת "או" של שתי מערכות משוואות "וגם":

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 40 = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

(2) $\begin{cases} y = x - \sqrt{x^2 + 40} \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

$$10 - 2x = x - \sqrt{x^2 + 40}$$

$$10 - x = -\sqrt{x^2 + 40}$$

נעלה בריבוע: $(10 - x)^2 = x^2 + 40$

$$100 - 20x + x^2 = x^2 + 40$$

$$20x = 60$$

$$x = 3$$

העלנו בריבוע, לכן נבדוק את הפתרון שקיבלנו.

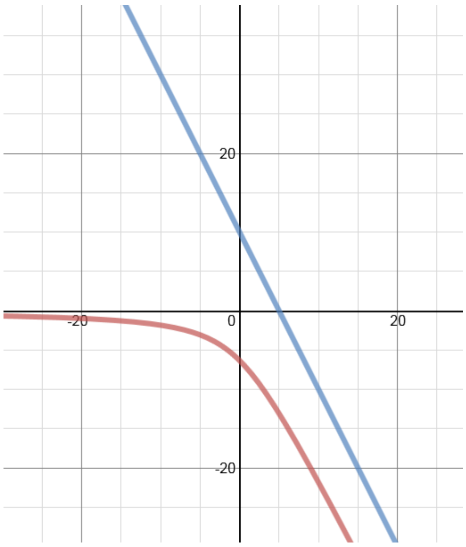
נציב בשלב שלפני ההעלאה בריבוע:

$$10 - 3 = -\sqrt{3^2 + 40}$$

פסוק שקר 7= -7

אין פתרון למערכת

מבחינה גרפית:



או

(1) $\begin{cases} y = x + \sqrt{x^2 + 40} \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

$$10 - 2x = x + \sqrt{x^2 + 40}$$

$$10 - x = \sqrt{x^2 + 40}$$

נעלה בריבוע: $(10 - x)^2 = x^2 + 40$

$$100 - 20x + x^2 = x^2 + 40$$

$$20x = 60$$

$$x = 3$$

העלנו בריבוע, לכן נבדוק את הפתרון שקיבלנו.

נציב בשלב שלפני ההעלאה בריבוע:

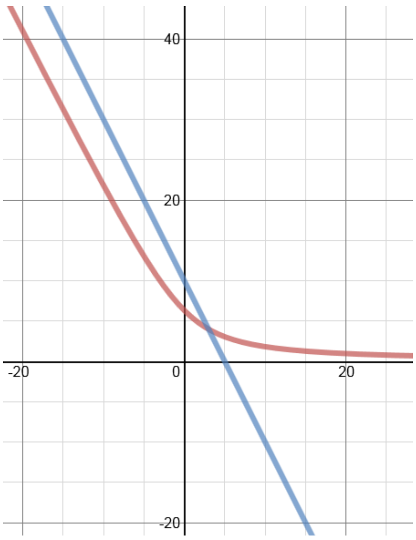
$$10 - 3 = \sqrt{3^2 + 40}$$

פסוק אמת 7=7

$$y = 4$$

פתרון אחד: $(3,4)$

מבחינה גרפית:



מסקנה: פתרון מערכות "או" הוא הפתרון של מערכת (1).

ראינו כי בפתרון מסתתרת משוואה אי רציונלית**.** משמעות: חובה לבדוק פתרונות גם במקום שלא נראה כבעייתי.

<u>סוגיה מעניינת להרחבת הדיון:</u>

לפונקציות $y_{1,2}=x\pm\sqrt{x^2+40}$ יש אסימפטוטה אופקית $y=0$:

$$\lim_{x\to\infty}(-x+\sqrt{x^2+40})=-x+|x|=-x+x=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x-\sqrt{x^2+40})=-x-|x|=-x-(-x)=0$$

שוב, הפתעה... עבור פונקציות אי רציונליות שאין בהן שבר, לא נהוג לחפש אסימפטוטות אופקיות.

הסבר שלישי

ניתן להתייחס אל משוואה הראשונה בתוך המערכת הנתונה $2xy+y^2-40=0$ כאל היפרבולה לא קנונית.

הגדרה מתוך ויקיפדיה:

היפרבולה היא צורה גאומטרית המהווה חתך חרוט, המורכבת משתי עקומות נפרדות הקרויות זרועות ההיפרבולה.

ההיפרבולה ניתנת להגדרה כמקום הגאומטרי של הנקודות שמקיימות שההפרש בין המרחקים שבין כל אחת מהן לשתי נקודות קבועות (נקודות המוקד) הוא קבוע.

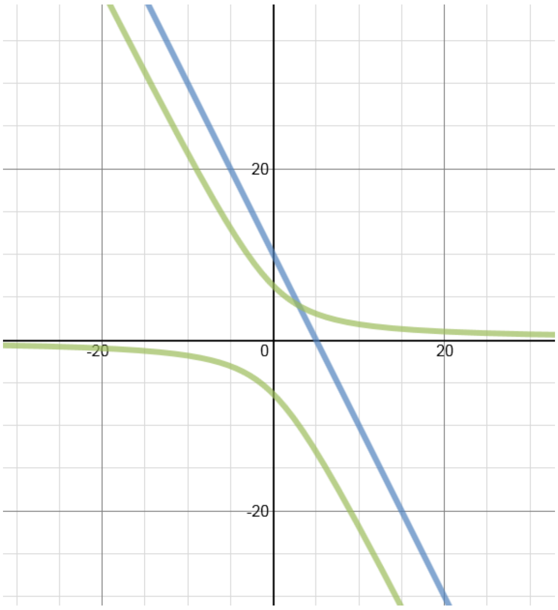
ההיפרבולה ניתנת לייצוג על פני מישור קרטזי כעקום, באמצעות המשוואה האלגברית הבאה:

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ כאשר $B^2>4AC$.

ניתן להגדיר **היפרבולה** גם כמקום הגאומטרי של הנקודות שהיחס בין מרחקן מנקודה קבועה (המוקד) וישר נתון (המכונה דירקטריקס) הוא קבוע גדול מ-1. קבוע זה הוא האקסצנטריות של ההיפרבולה.

המשוואה מתארת היפרבולה לא קנונית (הנושא לא בתוכנית הלימודים).

הגרף של העקום וישר הנתון:



ניתן לצייר את המשוואות בתוכנה גראפית ולדון בתכונותיהם של הגרפים ובנקודות המשותפות ביניהם.

הגרף עשוי לספק הסבר ולשכנע.

הסבר רביעי

מתוך הדיון שהתפתח בפורום בעקבות הצגת הבעיה במועדון ה-5.

תגובה 1: נהנתי מאד מהצגת הבעיה שלך. היא הצליחה לעורר בנו מבוכה כלשהי.. ולחדד משהו בקשר לבעייתיות בשימוש בטכניקות אלגבריות גרידא בלי חוש בקורת. אהבתי את ההסבר הגרפי. ניסיתי להפוך את השאלה לפשוטה יותר כך שאפשר יהיה לדבר גם עם תלמידי כיתה ט' על המבט הפונקציונאלי של הפתרון (מצורפת השאלה). לדעתי העיסוק בשאלה כזו בכיתה עשוי להוביל לדיון גם בתכנים מתמטיים מתקדמים יותר. למשל איזה עקום מייצגת המשוואה $x = y^2$ או $x^2 + y^2 = 1$ ... ועל ההבדל בין עקום כלשהו לפונציה.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x+2y=10 \end{cases}$$

$x = 10 - 2y$

$y = (10-2y)^2$

$y = 100 - 40y + 4y^2$

$4y^2 - 41y + 100 = 0.$

$y_{1,2} = \frac{41 \pm 9}{8} = 6\frac{1}{4},\ 4$

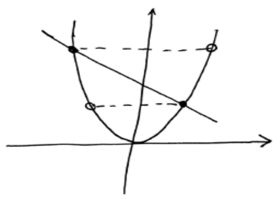
נציב במשוואה הראשונה:

$4 = x^2 \qquad x_{1,2} = 2 \qquad x_2 = -2$

$6.25 = x^2 \qquad x_1 = 2.5 \qquad y_2 = 2.5$

$$\boxed{\begin{matrix} (2,4) & (2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}) \\ (-2,4) & (-2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}) \end{matrix}}$$

קיבלנו ארבעה (!) פתרונות שונים.



תגובתנו: תודה על ההתייחסות. שמחה שהבעיה נגעה...
בדוגמא שהצגת, רואים שהפתרונות ש"נולדו" שייכים לישר x=2y-10. זו תבנית נגדית לתבנית המקורית, כאשר מעלים אותה בריבוע, מקבלים אותה משוואה ב- y. "הפתרונות" הנוספים נוצרו מהצבת y שהתקבלו בתבנית זו, הנגדית. הצבה במקום X והעלאה בריבוע הוסיפה פתרונות, בצורה "תמימה" ביותר, בלי שהרגשנו.
במערכת שלי זה דומה, אבל יש בה גם גורם xy שהוא "מקלקל" קצת את ההסבר...

תגובה 2: דיווח מהשטח: הבעיה העסיקה גם את הדרומיים במהלך ההמתנה לנסיעה ברכבת, מכאן נובע: מעניינת ומאתגרת. מ.ש.ל.

תגובה 3: הבעיה מעניינת מאוד. תופסת אותנו ועושה לנו נונונו על כך שלא אמרנו לתלמידים לבדוק את הפתרונות ולהיות ביקורתיים תמידדדדד. השרטוט פותח את העיניים. מדהים כמה פשוט וכמה אפשר ללמוד מזה...

מקורות והרחבות

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education* 59(5),389-407.

Zazkis, R. & Mamolo, A. (2011) Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics* 31(2), 8-13.

ר. מוגילבסקי , 2015. שקילות בפתרון משוואות, מערכות משוואות ואי-שוויונים.