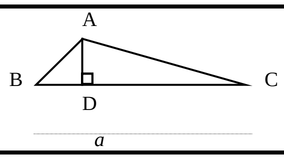
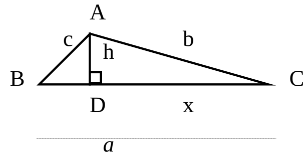
| | |
|---|---|
| נושא: **שתי דרכים לפתרון בעיה אחת** | רוזה לייקין / המחלקה להוראת המדעים |
| כרטיס מס׳ 1: **בעיות מינימום** | הטכניון, חיפה / אפריל-מאי 1995 |




## חלק I.

דוגמה:

בין כל המשולשים בעלי בסיס $a$ ושטח S נתונים, איזהו בעל ההיקף המינימלי?




### דרך מס׳ 1 לפתרון

1) $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a \;\Rightarrow\; h_a=\frac{2S}{a} \;\Rightarrow\; h_a$ - מספר קבוע $\Rightarrow$

נקח: DC=x (ראה ציור). $0\le x\le a$

2) P=a+b+c $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} DC=x \;\Rightarrow\; b^2=x^2+h^2,\;\; c^2=(a-x)^2+h^2 \\ P(x)=a+\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(a-x)^2+h^2} \end{array}\right.$

3) כדי למצוא משולש בעל היקף מינימלי מוצאים את נקודות הקיצון של פונקציה $P(x)$

$$P'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}+\frac{-(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+h^2}}=\frac{x\sqrt{(a-x)^2+h^2}+(x-a)\sqrt{x^2+h^2}}{\sqrt{x^2+h^2}\cdot\sqrt{(a-x)^2+h^2}}$$

4)

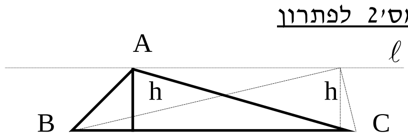
$$P'(x)=0 \Leftrightarrow x\sqrt{(a-x)^2+h^2}+(x-a)\sqrt{x^2+h^2}=0;\;\ldots\Rightarrow\ldots\; ah^2(a-2x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}a$$

5) בנקודה $x=\frac{1}{2}a$ פונקציה מקבלת ערך אקסטרמלי:

| x | 0 | | $\frac{1}{2}a$ | | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P' | | - | 0 | + | |
| P | | ↓ | m | ↑ | |

<u>תשובה</u>: בין כל המשולשים בעלי בסיס $a$ ושטח S נתונים,המשולש שווה השוקיים הוא בעל ההיקף המינימלי.

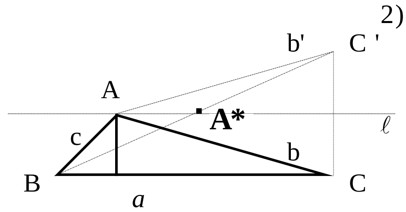
### דרך מס׳ 2 לפתרון




1) $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a \;\Rightarrow\; h_a=\frac{2S}{a} \;\Rightarrow\; h_a$ - מספר קבוע

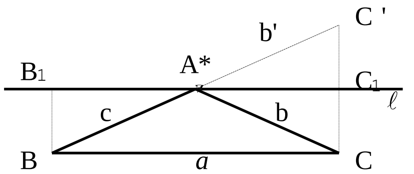
ולכן לכל משולש עם בסיס BC=$a$ המקיים את תנאי הבעיה קודקוד A נמצא על ישר $\ell$ מקביל לבסיס BC.

2)




a,P=a+b+c קבוע, לכן ההיקף מינימלי, כאשר הסכום b+c מינימלי.
נקודה C׳ סימטרית לנקודה C ביחס לישר $\ell$, לכל נקודה A על הישר $\ell$ קטעים AC ו- AC' סימטריים ביחס לישר $\ell$ (ר, ציור) ולכן מתקיים שוויון: b+c=b'+c .
הסכום b'+c (=b+c) מינימלי כאשר הנקודה A שייכת לקטע BC' , ולכן A* היא קודקוד המשולש בעל היקף מינימלי.

3)




$\Delta A^*BB_1 \cong \Delta A^*C'C_1 \Rightarrow \;\; c=b'$

$b=b' \;\;\Rightarrow\;\; c=b$

<u>תשובה</u>: בין כל המשולשים בעלי בסיס $a$ ושטח S נתונים, המשולש שווה השוקיים הוא בעל ההיקף המינימלי.

## חלק II

יש לפתור את הבעיה:

בין כל הטרפזים בעלי שטח ובסיסים ידועים מהו הטרפז בעל ההיקף המינמלי?

## חלק III

יש לפתור את הבעיות הבאות:

1. בין כל המשולשים בעלי שטח ידוע מהו המשולש בעל ההיקף המינימלי?
2. בין כל המשולשים החסומים במשולש הנתון כך, שקודקודיהם על צלעות המשולש הנתון, מהו המשולש בעל ההיקף המינימלי?

| | |
|---|---|
| נושא: **שתי דרכים לפתרון בעיה אחת** | רוזה לייקין / המחלקה להוראת המדעים |
| כרטיס מס׳ 2: **זווית בין עקום לבין משיק לעקום** הטכניון, | חיפה / אפריל-מאי 1995 |

## חלק I.

דוגמה:

נא להוכיח שהישר y=x מאונך לעקום $x^2+xy+y^2=12$ בנקודות החיתוך, אם ידוע, כי העקום קמור ובכל נקודה שלו קיים משיק**.

### דרך מס׳ 1 לפתרון

אם מכפלת שיפועי שני ישרים שווה ל- (-1) אז הישרים מאונכים.

נמצאה את שיפוע המשיק לעקום $x^2+xy+y^2=12$ בנקודה בה y=x*:

1) נמצא פונקצית נגזרת של הפונקציה הסתומה המוגדרת על ידי המשוואה הנתונה:

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad \Rightarrow \quad 2x+y+xy'+2yy'=0.$$

2) נמצא ערכי הנגזרת בנקודות בהן y=x:

$$\begin{cases} y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'=-\dfrac{3x}{3x} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow y'=-1$$

התקבל כי בנקודות החיתוך של העקום $x^2+xy+y^2=12$ עם הישר y=x שיפועי המשיקים שווים זה לזה וערכם (-1), ולכן משיקים אלה מאונכים לישר y=x.

ולכן הישר y=x מאונך לעקום $x^2+xy+y^2=12$ בנקודות החיתוך.

---

*קיימות שתי נקודות כאלה

**התנאי של קיום המשיק ושל קמירות הפונקציה מיותר לפתרון זה.

### דרך מס׳ 2 לפתרון

העקום $x^2+xy+y^2=12$ סימטרי ביחס לישר y=x (יחד עם כל נקודה (a,b) של העקום גם נקודה (b,a) נמצאת על העקום)

גם המשיקים לעקום, בנקודות סימטריות של העקום, סימטריים זה לזה ביחס לישר y=x.

לכן המשיק לעקום בנקודת החיתוך של העקום עם הישר y=x, סימטרי לעצמו ביחס לישר זה.

בנוסף ידוע, כי העקום קמור ובכל נקודה שלו קיים משיק, מכאן נובע כי משיק לעקום בנקודת החיתוך של העקום עם הישר y=x מאונך לישר זה.

ולכן הישר y=x מאונך לעקום $x^2+xy+y^2=12$ בנקודות החיתוך.

## חלק II

יש לפתור את הבעיה:

נא להוכיח שישר y=-x מאונך לעקום $x^2-5xy+y^2=9$ בנקודות החיתוך (אם ידוע, כי העקום קמור ובכל נקודה שלו קיים משיק).

## חלק III

יש לפתור את הבעיה:

נא להוכיח כי באליפסה, הקטעים המחברים את המוקדים לכל נקודה על האליפסה, יוצרים זוויות שוות עם המשיק לאליפסה באותה נקודה[1].

---

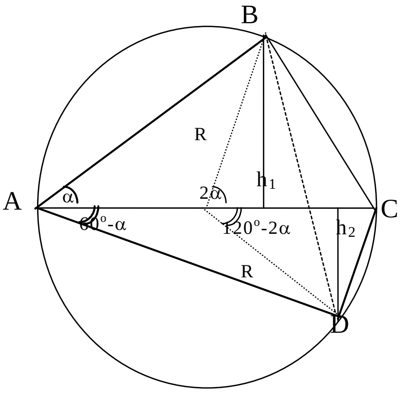
[1] לקוח מארבל (1990).

| רוזה לייקין / המחלקה להוראת המדעים<br>הטכניון, חיפה / אפריל-מאי 1995 | שתי דרכים לפתרון בעיה אחת<br>בעיות מקסימום | נושא:<br>כרטיס מס' 3: |
|---|---|---|

## חלק I.

דוגמה:

מרובע ABCD חסום במעגל. האלכסון AC הוא קוטר המעגל. זווית A היא בת 60°. נסמן ב- α את הזווית BAC. עבור אילו ערכים של α מתקבל מרובע ABCD ששטחו מקסימלי?




הקדמה - משותפת לשתי הדרכים:

רדיוס המעגל שווה ל- R.

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_1=R\cdot h_1;$$

$$S_{ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_2=R\cdot h_2;$$

$$S_{ABCD}=R\cdot h_1+R\cdot h_2=R\cdot(h_1+h_2)$$

R קבוע, לכן שטח המרובע ($S_{ABCD}$) מקסימלי כאשר סכום הגבהים $(h_1+h_2)$ מקבל ערך מקסימלי

דרך מס' 1 לפתרון.

$$\underline{h_1=R\sin 2\alpha;\quad h_2=R\sin(120^\circ-2\alpha)}\ ,\Rightarrow 0^\circ<\alpha<60^\circ$$

$$h_1+h_2=R(\sin 2\alpha+\sin(120^\circ-2\alpha))\Leftrightarrow h_1+h_2=R\cdot 2\sin 60^\circ\cdot\cos(60^\circ-2\alpha),\quad 0^\circ<\alpha<60^\circ$$

$$h_1+h_2=R\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3}-2\alpha),\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{3}$$

כדי למצוא את הערך המקסימלי של הפונקציה $h_1+h_2$ נמצא נקודות קיצון של פונקציה זו:

$$(h_1+h_2)'=2\sqrt{3}\cdot R\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-2\alpha);$$

$$(h_1+h_2)'=0\quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{3}\cdot R\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-2\alpha)=0\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad\alpha=30^o$$

מבדיקת התנהגות הפונקציה נובע כי בנקודה בה $\alpha=30^o$ הפונקציה מקבלת ערך מקסימלי

<u>תשובה:</u> עבור $\alpha=30^\circ$ מתקבל מרובע בעל שטח מקסימלי.

דרך מס' 2 לפתרון.

על המיתר BD נשענת זווית בת 60°. לכן בכל המרובעים המתאימים לנתוני השאלה אורך האלכסון BD קבוע.

כאשר נקודות B ו- D סימטריות זו לזו ביחס ל- AC, BD מאונך ל- AC ו- $h_1+h_2=BD$.

בכל המצבים האחרים BD משופע ל- AC ולכן $h_1+h_2\le BD$.

לכן הסכום $h_1+h_2$ מקבל ערך מקסימלי כאשר B ו- D סימטריות זו לזו ביחס ל- AC,

כלומר כאשר AC חוצה את הזווית $\angle BAD$

ולכן $\alpha=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ$

<u>תשובה:</u> עבור $\alpha=30^\circ$ מתקבל מרובע בעל שטח מקסימלי.

## חלק II

יש לפתור את הבעיה:

בין כל המשולשים החסומים במעגל נתון, מהו המשולש בעל השטח המקסימלי?

## חלק III

יש לפתור את הבעיות הבאות:

1. בין כל המשולשים בעלי היקף ידוע יש למצוא משולש בעל שטח מקסימלי.
2. יש להוכיח שלכל מרובע קמורABCD מתקיים האי-שוויון:

$S_{ABCD}\le\frac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot AD)$, מתי השוויון מתקיים?