יחידה 2
בעיות קיצון בגיאומטריה

תיאור היחידה

עמ' בתיאור היחידה

סוגי הקשרים:
- שימוש בכלים מתמטיים מתחומים שונים לפתרון בעיה מסוימת 2
- פתרון בעיות שונות בדרכים שונות

רמת הלימוד: במסגרת היחידה מוצגות שתי פעילויות מתמטיות. הפעילויות בנויות סביב פתרון של שלוש בעיות. עבור כל אחת מהבעיות מוצגים פתרונות שונים – לפחות שלושה פתרונות עבור כל בעיה. הפעילויות נבדלות ברמת הפירוט של הפתרונות המופיעים בכרטיסי העבודה לתלמידים.

פעילות 2.1 מומלצת לתלמידי 4 - 3 יח"ל. כוללת דוגמאות פתורות ובעיות לפתרון עצמי **פעילויות לתלמידים**

פעילות 2.2 מומלצת לתלמידי 5 - 4 יח"ל. כוללת הדרכות לביצוע פתרונות שונים לבעיה לדוגמה, ובעיה נוספת לפתרון באופן עצמאי

מומלץ להתאים את רמת הפעילות לרמת התלמידים בכיתה באופן אינדיווידואלי.

שיטת הלימוד: פתרון בעיות בקבוצות קטנות: עבור פעילויות 2.1 ו- 2.2 השיטות נבדלות בהתאם למבנה כרטיסי הלימוד בפעילויות לתלמידים. 4 ,3

הידע הדרוש:
פונקציה ריבועית
מינימום של פונקציה ריבועית
נגזרת ותכונותיה
פתרון משוואה ריבועית
סימטריה (לא הכרחי)

תוכן היחידה:
- **מדריך למורה כולל:** 2

מפת היחידה מסכמת את הדרכים השונות לפתרון הבעיות, ומציגה את המושגים המתמטיים הנלמדים ביחידה ואת הקשרים ביניהם. 4 ,3

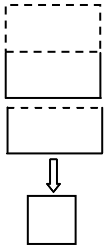
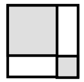
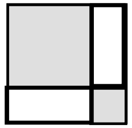
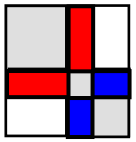
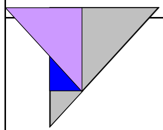
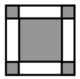
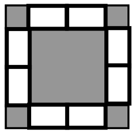
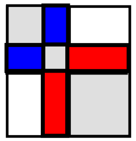
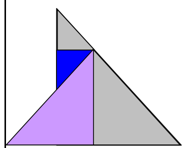
שיטות הפעלת הכיתה: לכל אחת מהפעילויות מומלצת שיטה מסוימת. ניתן לבחור בשיטה אחרת בהתאם לכיתת הלימוד**.** 5

פתרונות **פעילויות לתלמידים**

- **פעילויות לתלמידים הכוללות**:

2 כרטיסי לימוד ודף בעיות
כרטיס 1: כולל שלושה פתרונות (שלוש הנחיות לפתרון) לבעיה מס' 1
כרטיס 2: כולל שלושה פתרונות (שלוש הנחיות לפתרון) לבעיה מס' 2
דף בעיות: כולל בעיות 1, 2, ו- 3

מפת היחידה: בעיות קיצון בגיאומטריה

דרך לפתרון / בעיה	מציאת קיצון של פונקציה ריבועית				שימוש באי-שוויונים קלאסיים		פתרונים גיאומטריים*	
	אנליזה	**אלגברה**		**סימטריה גיאומטרית**	**אלגברה***	**גיאומטריה – עיקרון סימטרייה**	**השוואת שטחים**	
בעיה	שימוש בנגזרת	מציאת שיעור x של קדקוד הפרבולה	החלפת המשתנה*	שימוש בסימטריה של פרבולה		ריבוע הוא מלבן בעל שטח מקסימאלי עבור היקף נתון	השוואת השטח הנתון עם השטח המינימלי	השוואת השטח הנתון עם יתרת השטח
1. עובדי העירייה צריכים לבנות גדר שתקיף את שלוש צלעותיו של גן-משחקים מלבני, הצמוד לקיר. לרשות עובדי העירייה 20 מ' גדר. כיצד עליהם להקים את הגדר, כך ששטחו של גן-המשחקים יהיה השטח הגדול ביותר האפשרי?	$f(x) =$ $=20x - 2x^2$ $f'(x) =$ $=20 - 4x$	$a = -2,\ \ b = 20$ $\Rightarrow\ x_0 = 5$	–	$f(0) = f(10)$ $\Rightarrow\ x_0 = 5$	–	 או		–
2  חלקת אדמה ריבועית שאורך צלעה 10 מ' מחולקת ל-4 חלקים (ר' ציור). בשני ריבועים (חלקים מקווקווים) שותלים דשא ובחלקת האדמה הנותרת שותלים פרחים. מה צריך להיות ארכה של צלע הריבוע התחתון, כדי שהשטח המיועד לשתילת דשא יהיה מינימלי?	$f(x) =$ $=^2 + (10-x)^2$ $f'(x) =$ $=x - 20$	$a = 2,\ \ b = -20$ $\Rightarrow\ x_0 = 5$	$5t = x -$ $h(t) = 2t^2 + 50$	$f(0) = f(10)$ $\Rightarrow\ x_0 = 5$	$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ או $\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{xy}$			
3  בריבוע שצלעו 16 מ' חסומים 5 ריבועים (ר' ציור). מה צריך להיות אורכה של צלע הריבוע הפינתי, כדי שהשטח המקווקו יהיה מינימלי?	$g(x) =$ $=x^2 + (8-x)^2$ $g'(x) =$ $=4x - 16$	$a = 2,\ \ b = -16$ $\Rightarrow\ x_0 = 4$	$t = x - 4$ $h(t) = 2t^2 + 32$	$f(0) = f(8)$ $\Rightarrow\ x_0 = 4$	$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$			

– לא משתמשים בדרך זו לפתרון הבעיה הנתונה
* פתרון לפי דרך זו אינו מומלץ לרמה של 3 יחידות לימוד

שיטות ההפעלה

פעילות 2.1

רמה מומלצת: 3 - 4 יח"ל

שיטת הלימוד: פתרון בעיות בקבוצות קטנות

סדר העבודה:

1. **פתרון בעיות בקבוצות קטנות:** המורה מחלק את תלמידי הכיתה לקבוצות הטרוגניות בנות שלושה עד חמישה תלמידים כל אחת. כדאי לדאוג שבכל אחת מהקבוצות יהיה תלמיד/ תהיה תלמידה בעל/ת רמת ידע גבוהה, יחסית, לרמתם של התלמידים האחרים. תלמיד זה יהיה/תלמידה זו תהיה ראש הקבוצה. האחריות על התקדמות הקבוצה במהלך העבודה תהיה מוטלת על ראש הקבוצה.
כל התלמידים בקבוצה קטנה אחת מקבלים כרטיס עבודה זהה. כדאי לדאוג לכך שמספר שווה של תלמידים יקבל כרטיסים שונים. מומלץ, כי כל אחד מהכרטיסים יתקבל על ידי 3 קבוצות שונות (לפי מספר הפתרונות השונים שמופיעים בכרטיס). התלמידים בקבוצה הקטנה לומדים יחד את חלקו הראשון של הכרטיס, במטרה להגיע להבנה של הדרכים השונות לפתרון הבעיה שמופיעות בכרטיס. על התלמידים לחקור את הנושא ולהשתדל לעזור זה לזה.
בפתיחת השיעור כדאי להדגיש כי כל אחת מהקבוצות תצטרך להציג אחת מהדרכים לפתרון בעיה המופיעה בחלק השני של הכרטיס. יש להבהיר מראש לתלמידים, שהמורה יבחר איזו מבין הדרכים השונות לפתרון בעיה תוצג על ידי כל אחת מהקבוצות.כמו כן, חשוב ליידע את התלמידים שחברי אותה קבוצה יקבלו ציונים זהים. ההערכה נעשית על סמך הצגת הפתרון ובדיקת עבודה כתובה של אחד התלמידים בקבוצה. אין להודיע מראש מי מהתלמידים יציג את הפתרון ומי מהתלמידים יגיש את עבודתו לבדיקה. בדרך זו נוצרת אוירה חיובית של אחריות הדדית במהלך העבודה הקבוצתית.
מומלץ לעקוב אחר התקדמות התלמידים בפתרון הבעיות ולעזור להם במידת הצורך.
2. **הצגת הפתרונות ודיון:** בחלק השני של כרטיס 1 התלמידים מתבקשים לפתור את הבעיה הפתורה בכרטיס 2. בחלק II של כרטיס 2 התלמידים מתבקשים לפתור את הבעיה הפתורה בכרטיס 1. כך תלמידים יכולים לבדוק האם הבעיה פתורה נכון ולתקן את הפתרון במידת הצורך.
המלצות:
   - לבדוק לפני הצגת הפתרונות את ההעדפות של תלמידים בקבוצות השונות הן בנוגע להצגה של דרך מסוימת לפתרון הבעיה, והן בנוגע לתלמיד/ה שיציג/שתציג את הפתרון;
   - לבקש מהתלמידים להציג את הדרך המועדפת עליהם, במידה והדבר אפשרי;
   - להזמין להצגת הפתרון את התלמידים הבינוניים בקבוצה, ולא להזמין להצגה את התלמידים החלשים ביותר.
3. בעיה מס' 3 ניתנת לתלמידים לפתרון באופן עצמאי. מומלץ, כי תלמידים שיצליחו לפתור את הבעיה בשלוש הדרכים השונות יקבלו בונוס.

הזמן המומלץ: עבודה בקבוצות קטנות: כ- 60 - 90 דקות (שיעור או שניים)
הצגת פתרונות: כ- 90 דקות.

סה"כ משך העבודה עם כל הכרטיסים – 3- 4 שעורים.

בשיעור הרביעי מומלץ לנהל דיון מסכם, ולענות על שאלות התלמידים בהקשר לכרטיסי הלימוד ולשיעורי הבית.

שיטות ההפעלה- המשך

פעילות 2.2

רמה מומלצת: 4 - 5 יח"ל

שיטת הלימוד: פתרון בעיות בקבוצות קטנות

סדר העבודה:

1. **פתרון בעיות בקבוצות קטנות**: המורה מחלק את תלמידי הכיתה לקבוצות הטרוגניות בנות שלושה עד חמישה תלמידים כל אחת. כדאי לדאוג שבכל אחת מהקבוצות יהיה תלמיד/ תהיה תלמידה בעל/ת רמת ידע גבוהה, יחסית, לרמתם של התלמידים האחרים. תלמיד זה יהיה/תלמידה זו תהיה ראש הקבוצה. האחריות על התקדמות הקבוצה במהלך העבודה תהיה מוטלת על ראש הקבוצה. כל התלמידים בקבוצה קטנה אחת מקבלים כרטיס עבודה זהה. כדאי לדאוג לכך שמספר שווה של תלמידים יקבל כרטיסים שונים. מומלץ, כי כל אחד מהכרטיסים יתקבל על ידי 3 קבוצות שונות (לפי מספר ההנחיות השונות שמופיעות בכרטיס). התלמידים בקבוצה הקטנה לומדים יחד את חלקו הראשון של הכרטיס, במטרה להגיע לפתרונות מלאים בהתאם להנחיות. על התלמידים לחקור את הנושא ולהשתדל לעזור זה לזה.
   בפתיחת השיעור כדאי להדגיש כי כל אחת מהקבוצות תצטרך להציג אחת מהדרכים לפתרון בעיה המופיעה בחלק השני של הכרטיס. יש להבהיר מראש לתלמידים, שהמורה יבחר איזו מבין הדרכים השונות לפתרון בעיה תוצג על ידי כל אחת מהקבוצות.כמו כן, חשוב ליידע את התלמידים שחברי אותה קבוצה יקבלו ציונים זהים. ההערכה נעשית על סמך הצגת הפתרון ובדיקת עבודה כתובה של אחד התלמידים בקבוצה. אין להודיע מראש מי מהתלמידים יציג את הפתרון ומי מהתלמידים יגיש את עבודתו לבדיקה. בדרך זו נוצרת אוירה חיובית של אחריות הדדית במהלך העבודה הקבוצתית. מומלץ לעקוב אחר התקדמות התלמידים בפתרון הבעיות ולעזור להם במידת הצורך.

2. **הצגת הפתרונות ודיון:** בחלק השני של כרטיס 1 התלמידים מתבקשים לפתור את הבעיה הפתורה בכרטיס 2. בחלק II של כרטיס 2 התלמידים מתבקשים לפתור את הבעיה הפתורה בכרטיס 1. כך תלמידים יכולים לבדוק האם הבעיה פתורה נכון ולתקן את הפתרון במידת הצורך.
   המלצות:
   - לבדוק לפני הצגת הפתרונות את ההעדפות של תלמידים בקבוצות השונות הן בנוגע להצגה של דרך מסוימת לפתרון הבעיה, והן בנוגע לתלמיד/ה שיציג/שתציג את הפתרון;
   - לבקש מהתלמידים להציג את הדרך המועדפת עליהם, במידה והדבר אפשרי;
   - להזמין להצגת הפתרון את התלמידים הבינוניים בקבוצה, ולא להזמין להצגה את התלמידים החלשים ביותר.

3. בעיה מס' 3 ניתנת לתלמידים לפתרון באופן עצמאי. מומלץ, כי תלמידים שיצליחו לפתור את הבעיה בשלוש הדרכים השונות יקבלו בונוס.

הזמן המומלץ: עבודה בקבוצות קטנות: כ- 45 - 60 דקות (שיעור או שניים)
הצגת פתרונות: כ- 90 דקות.

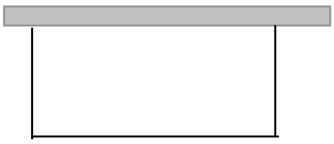
סה"כ משך העבודה עם כל הכרטיסים – 3- 4 שעורים.

בשיעור הרביעי מומלץ לנהל דיון מסכם, ולענות על שאלות התלמידים בהקשר לכרטיסי הלימוד ולשיעורי הבית.

פתרונות

פתרונות לבעיה 1

בעיה 1 עובדי העירייה צריכים לבנות גדר שתקיף את שלוש צלעותיו של גן-משחקים מלבני, הצמוד לקיר של גן-ילדים. לרשות עובדי העירייה 20 מ' גדר. כיצד עליהם להקים את הגדר, כך ששטח גן-המשחקים יהיה השטח הגדול ביותר האפשרי?



דרך א': בדיקה של ערכי הפונקציה בקצוות

דרך ב': מציאת מינימום ומקסימום של פונקציה ריבועית

דרך ג': שימוש בתכונת שטח הריבוע (עיקרון השטח המקסימלי של הצורה הסימטרית ביותר)

הפתרונות המלאים מוצגים בכרטיס 1, פעילות 2.1

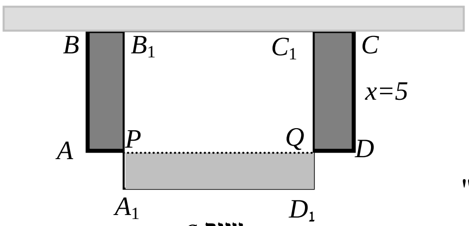
דרך ד': **פתרון גיאומטרי – לא נכלל בכרטיסי העבודה.**

נשווה את שטח גן-המשחקים עבור $x = 5$ ($ABCD, AB=5$ בציור) עם השטח המתקבל עבור $x \neq 5$.

לשם כך, נשים את השטחים זה על זה (בציורים, שטחים $A_1B_1C_1D_1$ ו- $A_2B_2C_2D_2$ נמצאים על שטח $ABCD$). נצבע את "שאריות" השטחים בצבע אפור (כהה ובהיר). גבהים במלבנים הצבועים (בשאריות) שווים על בסיס שמירת היקף הגדר. לכן, על מנת להשוות את שטחי "השאריות", נשווה את אורכן.

בציור a:

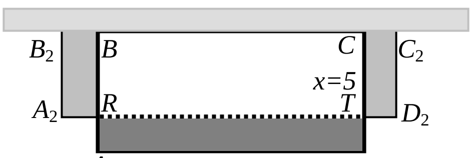
$2AB=10, AB=5$ וגם $AD=10$; $A_1B_1>5$ לכן $A_1D_1<AD=10$. מכאן, ששטח "השאריות" מ- $ABCD$ (ABB_1P ו- DCC_1Q -- אפור כהה) גדול משטח "השארית" מ- $A_1B_1C_1D_1$ ($A1PQD1$ -- אפור בהיר).



ציור a

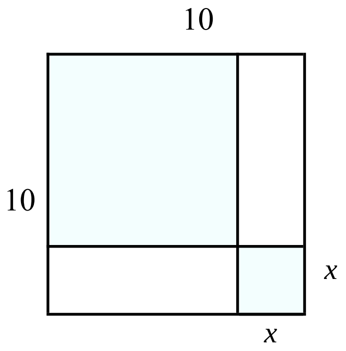
בציור b:

$AB=5$ לכן $AD=10$; $A_2B_2<5$ לכן $2A_2B_2<10$. מכאן, ששטח "השארית" מ- $ABCD$ ($ADTP$ -- אפור כהה) גדול משטח "השאריות" מ- $A_2B_2C_2D_2$ (A_2B_2BR ו- D_2C_2CT -- אפור בהיר).



ציור b

פתרונות לבעיה 2



בעיה 2: נתונה חלקת אדמה ריבועית שאורך הצלע שלה 10 מ'. בקצה הימני התחתון של הריבוע שותלים שטח של דשא בצורת ריבוע בעל צלע x.
גם בקצה השמאלי העליון שותלים דשא (ר' ציור 2') בצורת ריבוע. בשטח הנותר שותלים פרחים. מה צריך להיות ערכו של x, כדי שהשטח המיועד לשתילת דשא יהיה מינימלי?

דרך א': בדיקה של ערכי הפונקציה בקצוות

דרך ב': מציאת מינימום ומקסימום של פונקציה ריבועית

דרך ג': שימוש בתכונת שטח הריבוע (עיקרון השטח המקסימלי של הצורה הסימטרית ביותר)

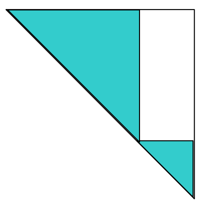
הפתרונות המלאים מוצגים בכרטיס 2, פעילות 2.2

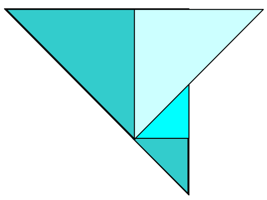
דרך ד. פתרון גיאומטרי -- – לא נכלל בכרטיסי העבודה.

נחתוך את הריבוע לאורך אלכסון לשני חלקים חופפים.

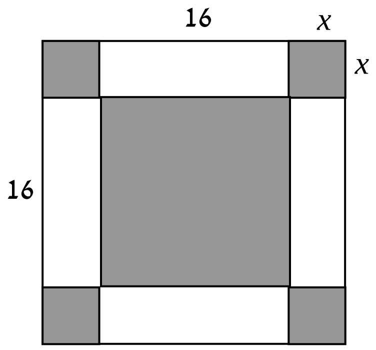
נמצא את הערך המינימלי של שטח הדשא **בציור** a (שהוא מחצית מהשטח הכולל של הדשא).
בציור b ניתן לראות כי שטח הדשא אינו קטן משטח הפרחים: משולשים צבועים מכסים את המלבן הלבן).

השוויון מתקבל כאשר המשולשים הכהים חופפים. כלומר, כאשר $x = 5$.


ציור a


ציור b

פתרון לבעיה 3



בעיה 3 בריבוע שצלעו 16 ס"מ חסומים 4 ריבועים זהים בפינות וריבוע נוסף במרכז (השטח הכהה). חשבו מה צריך להיות ערכו של x, כדי שהשטח הכהה יהיה מינימלי.

תשובה: 4 ס"מ.

דרך א': בדיקה של ערכי הפונקציה בקצוות

פונקציה $f(x)$ המבטאת את השטח הכהה היא פונקציה ריבועית. ברור כי $0< x <8$

עבור $x = 0$ ו- $x = 8$ (הערכים הקיצוניים) השטח הכהה שווה לשטח של הריבוע המקורי.

כלומר: $f(0) = f(8)$ והוא השטח המקסימלי של הצורה הכהה. לכן, ניתן לטעון שקדקוד הפרבולה נמצא באמצע הקטע $[0, 8]$. כלומר, עבור $x = 4$.

דרך ב': מציאת מינימום ומקסימום של פונקציה ריבועית

נרשום פונקציה המבטאת את השטח של הצורה הכהה: $f(x) = 4x^2 + (16 - 2x)^2$

על מנת למצוא את הערך של x המתאים לשטח המינימלי של הצורה $[0, 8]$ נמצא נקודת מינימום של הפונקציה. נשים לב כי $f(x) = 4 \cdot g(x)$, כאשר $g(x) = x^2 + (8 - x)^2$

ניתן למצוא את המינימום הנ"ל בכמה דרכים שונות:

i. שימוש בנגזרת: נגזרת $g'(x) = 2x + 2(x - 8) = 4x - 16$ מתאפסת כאשר $x = 4$.

ii. מציאת קדקוד הפרבולה: $g(x) = x^2 + (8 - x)^2 = 2x^2 - 16x + 64$

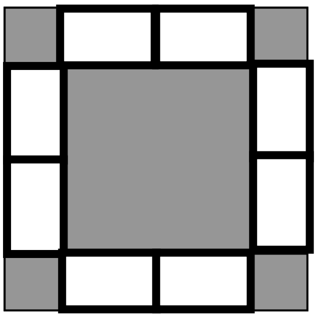
$$a=2,\ b=-16$$

$$x_{\text{קדקוד}} = \frac{-b}{2a} = \frac{16}{2 \cdot 2} = 4$$

iii. החלפת משתנה: נסמן $t = x - 4$, נקבל $x^2 + (8 - x)^2 = (t + 4)^2 + (t - 4)^2 = 2t^2 + 32$

כיוון שהביטוי $2 \cdot t^2$ אינו שלילי, המינימום שלו מתקבל כאשר $t = 0$.

דרך ג': שימוש בתכונת שטח הריבוע (עיקרון השטח המקסימלי של הצורה הסימטרית ביותר).



בחלק זה נשתמש ב**כלל** הבא:

בין כל המלבנים בעלי היקף נתון,

הריבוע הוא בעל השטח המקסימלי.

במקום מציאת המינימום של השטח הכהה, ניתן למצוא את המקסימום של השטח הלבן. השטח הלבן מורכב משמונה מלבנים בעלי היקף קבוע (הסבירו מדוע) השווה ל- 16 (ר' ציור). לכן השטח הלבן יהיה מקסימלי כאשר צלעות המלבנים שווֹת.