"הכי טוב שיש"
בעיות קיצון

- כיצד נפתח את לימוד הנושא של בעיות קיצון?
- נכיר פתרון בעיות קיצון בדרכים שונות
- האם אפשר גם בלי חדו"א?

THE TRUMP FOUNDATION
קרן טראמפ

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

חמ"ה
מרכז אינטר-דיסציפלינארי חקר, חינוך, מחוננות והצטיינות

אוניברסיטת חיפה
University of Haifa
جامعة حيفا

סיפורים על מקסימום ומינימום

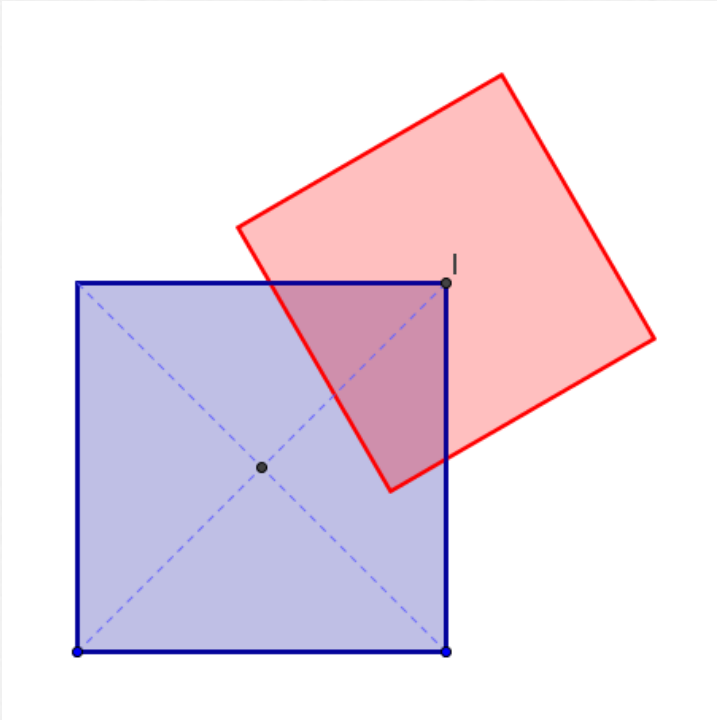
"בעולם לא קורה
שום דבר שאין לו
משמעות של
מקסימום או
מינימום כלשהו"

ל. אוילר

שאלת חימום

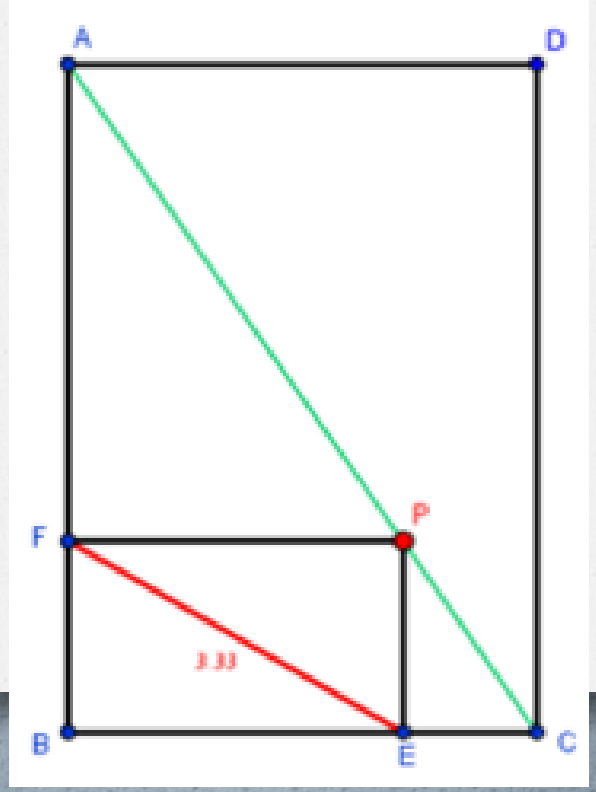
ריבוע סוב סוב

בשרטוט שלפניכם שני ריבועים. נקודת המרכז של ריבוע הקטן היא נקודת הקודקוד של הריבוע הגדול. מה צריך להיות גודלה של זווית הסיבוב כדי שהשטח המשותף לשני הריבועים יהיה מקסימלי ?



ועוד שאלת חימום

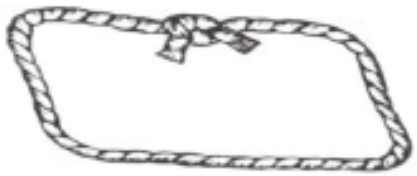
עליכם לבנות שער למחנה ע"פ ההוראות הבאות:
המחנה מגודר בצורת מלבן .ABCD
מקמו נקודה P כלשהי על אלכסון המלבן AC
מנקודה זו העבירו מקבילים לצלעות המלבן, כך שייווצר מלבן חסום BEPF
המבואה למחנה היא המשולש BFE
את השער עליכם לבנות כאלכסון המלבן החסום, FE
מצאו את מקומה של הנקודה P כך שאורך השער יהיה **הקצר ביותר.**



הצעות לפתיחת שיעור בנושא
בעיות ערך קיצון

המחנה "הכי הכי"

1. מסגרות מחבלים



ברשותכם חבל באורך 20 מטרים.

א. עליכם ליצור מסגרת בצורה של מקבילית,
בעלת השטח **הגדול ביותר**.

ב. עליכם ליצור שני ריבועים,
כך שסכום שטחי שני הריבועים יהיה **הקטן ביותר**.

הסבירו את בנייתכם ונמקו.

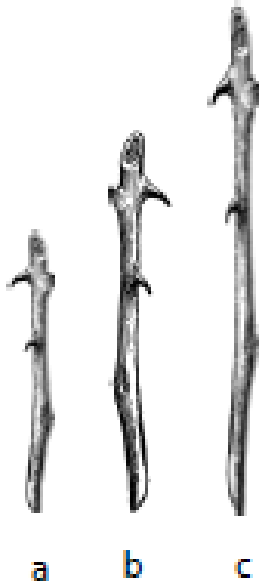
מקור- דן עמיר, פתרונות אלמנטאריים לבעיות קיצון

מתוך הפיצוח - המחנה "הכי הכי"

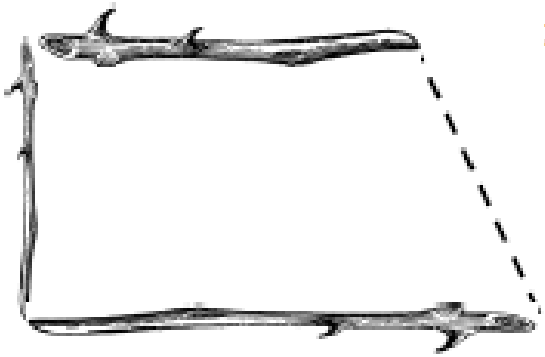
4. השטח הכי גדול

במשימת הישרדות קיבלתם שלוש סנאדות (מוטות עץ) באורכים שונים:

a<b<c (ראו איור).



עליכם לבנות בעזרת המוטות מרובע, כך ששלושת המוטות יהיו מאונכים זה לזה (טרפז פתוח). באיזה סדר עליכם להניח את המוטות, כך שיתקבל **השטח הגדול ביותר**?



4. השטח הכי גדול - פתרון

יתכנו שלוש אפשרויות:

(1) הבסיסים הם a ו- b, הגובה הוא c והשטח הוא: $S_1 = \frac{a+b}{2} \cdot c$

(2) הבסיסים הם a ו- c, הגובה הוא b והשטח הוא: $S_2 = \frac{a+c}{2} \cdot b$

(3) הבסיסים הם b ו- c, הגובה הוא a והשטח הוא: $S_3 = \frac{b+c}{2} \cdot a$

נבדוק, מה יותר גדול S_1 או S_2?

$c > b \Rightarrow ac+bc \ldots ab+bc$, לכן: $S_1 > S_2$

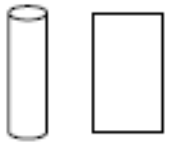
נבדוק, מה יותר גדול S_2 או S_3?

$b > a \Rightarrow ab+bc \ldots ab+ac$, לכן: $S_2 > S_3$

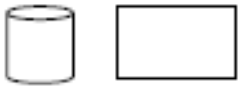
קיבלנו: $S_1 > S_2 > S_3$. לכן הטרפז בעל שטח המקסימלי הוא זה שגובהו הוא המוט הארוך ביותר.

במשפחת אורן מאוד אוהבים פופקורן, וגם אוהבים להכין אריזות לכל מטרה. אתמול רצו בני המשפחה להכין מיכל גלילי משקף של מקרן שקפים ולמלא אותו פופקורן. יש שתי אפשריות לעשות זאת:

לאורך:



לרוחב



(חומר לתחתית הגליל יש להם בשפע)

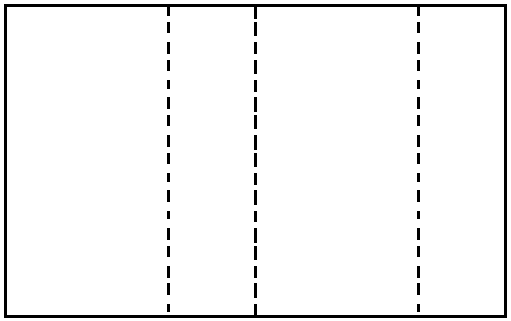
הבעל, תמיר, (195 ס"מ), בטוח שהגובה הכי חשוב, ושהגליל הגבוה מכיל יותר פופקורן מאשר הגליל הרחב. סבתא רוחה בטוחה שהרוחב הכי חשוב, ושהכי הרבה פופקורן ייכנס לגליל הרחב, והבת שלוה צוחקת מכל העניין ואומרת להם שהם משתמשים באותו שקף, ואיך שלא יגלגלו אותו תיכנס בדיוק אותה כמות של פופקורן.

מה דעתכם???

בעיות קיצון – איך מתחילים?

הצעה מס 2

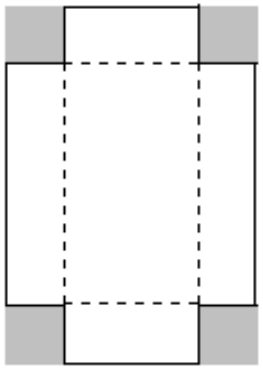
לפעמים מעוניינים בני המשפחה לקפל את השקף כך שתיווצר מעטפת של תיבה בעלת נפח מקסימלי.



קיפול אפשרי

א. מה יכול לגרום לאנשים להעדיף מיכל בצורת תיבה על פני מיכל בצורת גליל?

ב. מהו הנפח המקסימלי של תיבה אשר המעטפת שלה מתקבלת מקיפול של שקף בגודל A4? (ניר A4 גודלו 21ס"מ X 29.7ס"מ)

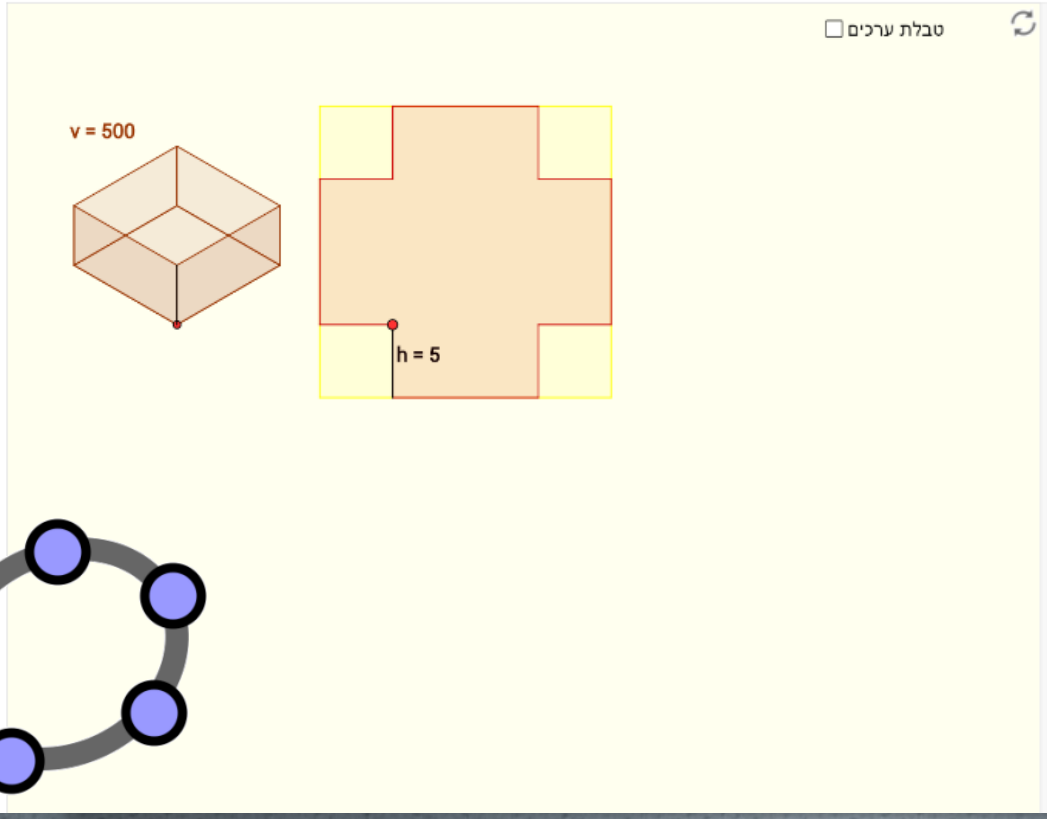


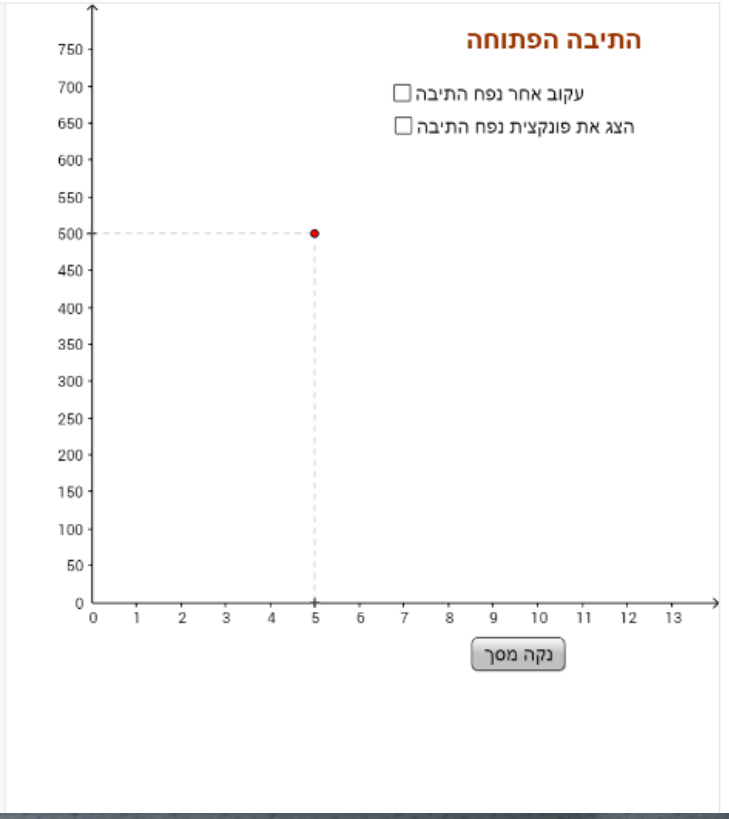
ליום ההולדת של בת הזקונים החליטו בני המשפחה להכין משקף A4 קופסה עם תחתית ולמלא אותה בשוקולד תוצרת בית.

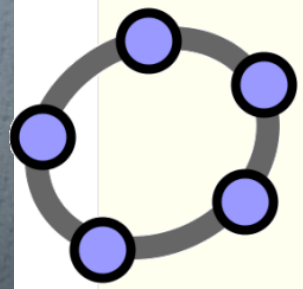
לשם כך הם גוזרים מהשקף ריבועים בפינות , ומקפלים לאורך הקווים המרוסקים. מהי הכמות המקסימלית של שוקולד שניתן להכניס לקופסה?

בעית קיצון - התיבה הפתוחה

ברשותנו נייר ריבועי שצלעו אורכה 20 ס"מ.
נבנה תיבה פתוחה על ידי כך שנחתוך ארבעה ריבועים מפינות הנייר הריבועי.
ברצוננו לבנות תיבה בעלת הנפח הגדול ביותר.
מה מידות הריבועים שנחתוך כך שנקבל תיבה פתוחה בעלת נפח מקסימלי?







בעיות קיצון – איך מתחילים?

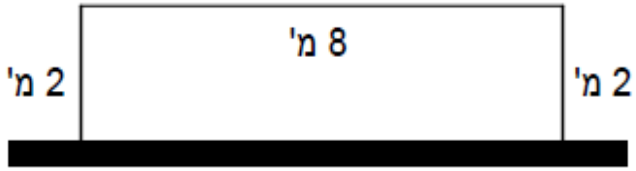
הצעה מס 3

החצר הגדולה ביותר

גל רוצה לבנות חצר מלבנית לכלבו, שתהיה צמודה לקיר לבנים ארוך בקצה החצר. לרשותו של גל גליל גדר רשת באורך 12 מ'. אחת מצלעות המלבן היא קיר הלבנים, ולכן הגדר צריכה להספיק לשלוש צלעות של המלבן.

אחת האפשרויות של גל להקים את הגדר היא כמתואר באיור 1. האם זו האפשרות הטובה ביותר?

מהו השטח הגדול ביותר של חצר שגל יכול לבנות בדרך זו?



איור 1

מתוך הספר ללמוד וללמד אנליזה – בעיה מתפתחת

1. במחסן של גל יש גליל של גדר רשת באורך **12 מ'**. גל רוצה לבנות לגור הכלבים שמצא חצר מלבנית צמודה למחסן שבחצר. מבין כל החצרות המלבניות שגל יכול לבנות בעזרת הגדר, מהי החצר ששטחה הוא הגדול ביותר?

[תש': 3 מ' × 6 מ'. השטח: 18 מ"ר.]

2. אם גל יחליט להקים חצר מלבנית מגדר באורך **6 מ'**, בצמוד למבנה לבנים **בצורת האות ר**, הגדר תצטרך להספיק רק **לשתי צלעות** סמוכות של המלבן. מהו השטח המקסימלי של חצר מלבנית שגל יכול לבנות בדרך זו?

[תש': 3 מ' × 3 מ'. השטח: 9 מ"ר.]

3. במחסן של גל יש גליל של גדר באורך **6 מ'**. גל רוצה לבנות לגור הכלבים שמצא חצר מלבנית צמודה למחסן שבחצר. מבין כל החצרות המלבניות שגל יכול לבנות בעזרת הגדר, מהי החצר ששטחה הוא הגדול ביותר?

[תש': 3 מ' × 1.5 מ'. השטח: 4.5 מ"ר.]

4. אם גל יחליט לבנות חצר מלבנית **שאיננה צמודה לקיר**, מהו השטח המקסימלי של חצר שניתן לבנות באמצעות גדר באורך **6 מ'?**

[תש': 1.5 מ' × 1.5 מ'. השטח: 2.25 מ"ר.]

5. גל רוצה לבנות חצר **שצורתה משולש ישר-זווית** בצמוד **לזווית של מבנה הלבנים**. כעת הוא זקוק לגדר רק בשביל היתר של המשולש. האם לדעתכם יצליח להגדיל בדרך זו את החצר של הכלב? מצאו את השטח הגדול ביותר של החצר כאשר אורך הגדר הוא **6 מטר**. מה צורתה?

[תש': מש"ש. השטח: 9 מ"ר.]

6. גל שם לב שבכל המקרים שתכנן חצר מלבנית עם גדר בעלת אורך נתון, הוא היה צריך להשתמש במחצית מאורך הגדר לכל אחד משני ממדי החצר, כדי לקבל את השטח הגדול ביותר. הוא טוען שתוצאה זו נכונה **לכל אורך של גדר**. האם גל צודק? איך ניתן לדעת זאת?

7. גל החליט לבנות חצר מלבנית בצמוד **לזווית של מבנה הלבנים** ולהסתפק **בשטח של 6 מ"ר**. מהו **האורך המינימלי** של גדר שדרוש לגל להקמת הגדר, בהנחה שהגדר צריכה להספיק לשני קירות בלבד?

8. במחסן של גל יש גליל של גדר באורך **a מ'**. גל רוצה לבנות לגור הכלבים שמצא, חצר מלבנית צמודה למחסן שבחצר. מבין כל החצרות המלבניות שגל יכול לבנות בעזרת הגדר, מהי החצר ששטחה הוא הגדול ביותר?

[תש': $\frac{a}{2}$ מ × $\frac{a}{4}$ מ'. השטח: $\frac{a^2}{8}$ מ"ר. התוצאה מתאימה להבחנה של גל.]

9. גל החליט לבנות חצר מלבנית **שאינה צמודה לאף קיר** לבנים, באמצעות גדר באורך **של 6 מ'**. בתוך החצר גל רוצה להקים מחיצה פנימית מקבילה לזוג צלעות, מאותו חומר של הגדר. מה צריכות להיות מידות החצר כדי ששטחה יהיה מקסימלי?

[תש': 1.5 × 1. התוצאה מתאימה להבחנה של גל.]

10. גל החליט לבנות חצר מלבנית **שאינה צמודה לאף קיר** לבנים, **בשטח של 6 מ"ר**. בתוך החצר גל רוצה להקים מחיצה פנימית מקבילה לזוג צלעות, מאותו חומר של הגדר. מהו **האורך המינימלי** של גדר שהוא זקוק לה?

[תש': אורך הגדר: 12 מ', מידות החצר 2 מ' × 3 מ'.]

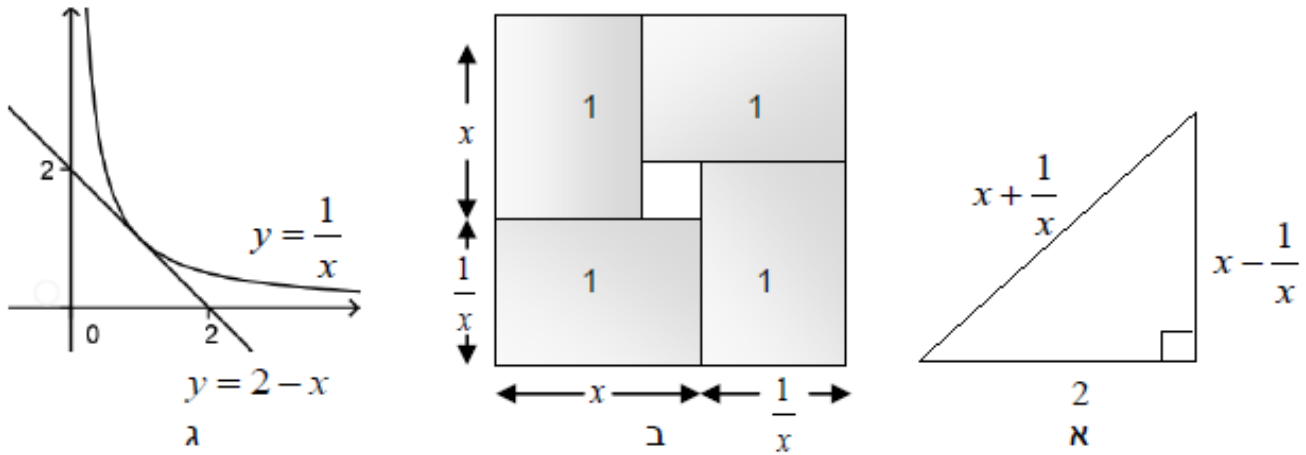
הצעות לפתיחת שיעור בנושא
בעיות ערך קיצון

ואיך אתם מתחילים?

לפני ..... חדו"א

הוכחות ויזואליות[3] ללא כלים של חשבון דיפרנציאלי

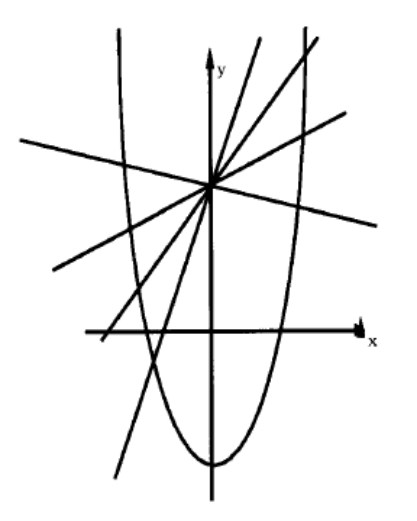
בסרטוטים שלפניכם מסתתרות שלוש הוכחות לכך ש- $2 \le x + \frac{1}{x}$ לכל x חיובי. גלו את ההוכחות.



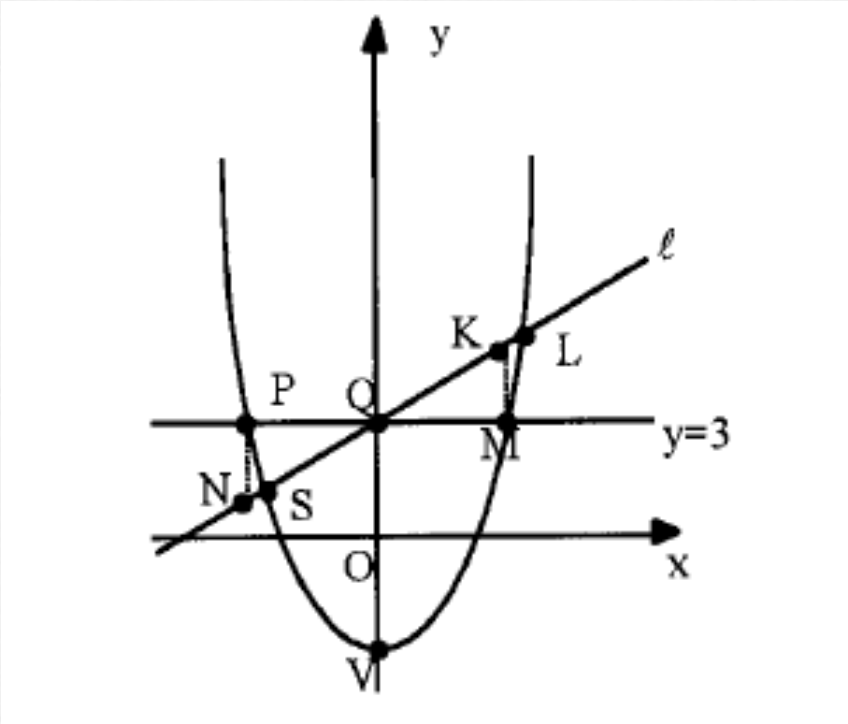
איור 29

אפשר (לפתור) גם אחרת

נתונה פונקציה ריבועית $y = x^2 - 3$
ומשפחת פונקציות קוויות $y = a\,x + 3$
מה צריך להיות ערך של a על מנת
שהשטח המוגבל
על ידי הפרבולה והישר יהיה מינימלי ?



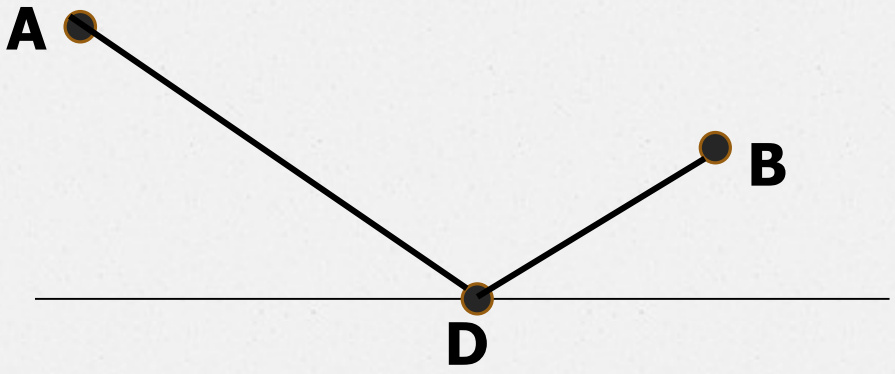
אפשר (לפתור) גם אחרת



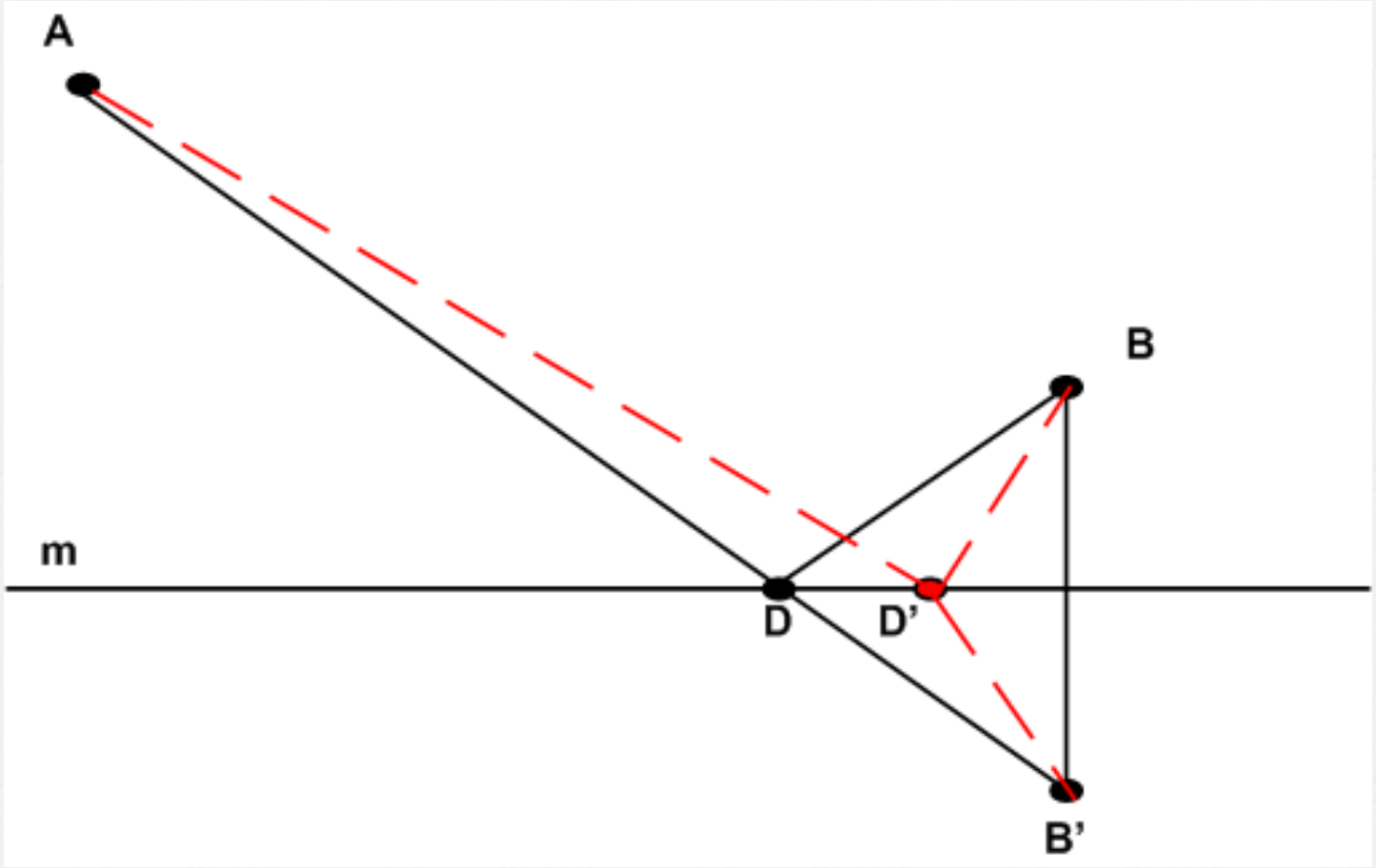
שאלה פילוסופית אחת ושני פתרונות

בעיית הרון מאלכסנדריה

נתונות שתי נקודות A, B באותו צד של הישר m. יש למצוא נקודה D על הישר כך שסכום המרחקים AD ו-BD יהיה הקטן ביותר.



שאלה פילוסופית אחת ושני פתרונות



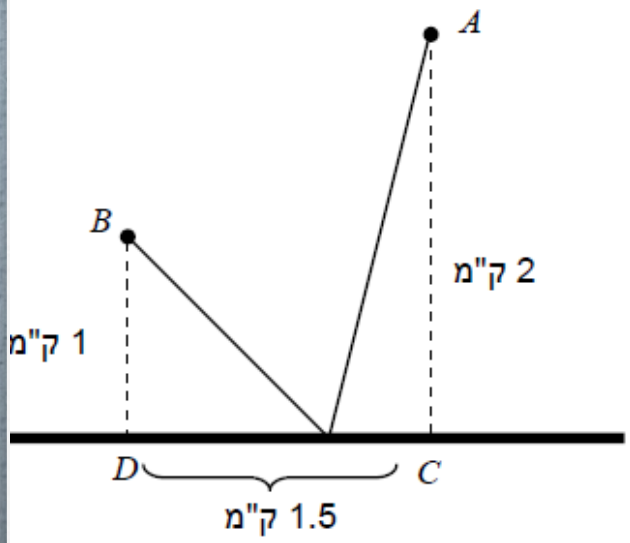
שאלה פילוסופית אחת ושני פתרונות

ועוד קצת פרטים

בחופשת הקיץ הקימו תלמידי חוגי הסיירות של בית הספר "חולות נודדים" שני מחנות אוהלים, בשטח חולי מצדו האחד של כביש ישר. בערב הכינו המדריכים הפתעה והביאו לתלמידים כתב חידה למשחק. התלמידים צריכים לצאת ממחנה A, לרוץ לכביש אל מכונית המדריכים, לקחת את כתב החידה ולרוץ אתו למחנה B.

על-פי חוקי בית הספר אסור לתלמידים לצעוד אפילו מטר אחד לאורך הכביש, אלא בשטח החולי בלבד.

מחנה A ממוקם במרחק 2 ק"מ מהכביש, ומחנה B במרחק 1 ק"מ מהכביש. נסמן ב- C את הנקודה על הכביש הקרובה ביותר למחנה A. נסמן ב- D את הנקודה על הכביש הקרובה ביותר למחנה B. המדריכים יכולים לחנות רק בחלק הכביש שבין הנקודות D ו- C. המרחק, לאורך הכביש בין הנקודות C ו- D, הוא 1.5 ק"מ.



איור 43

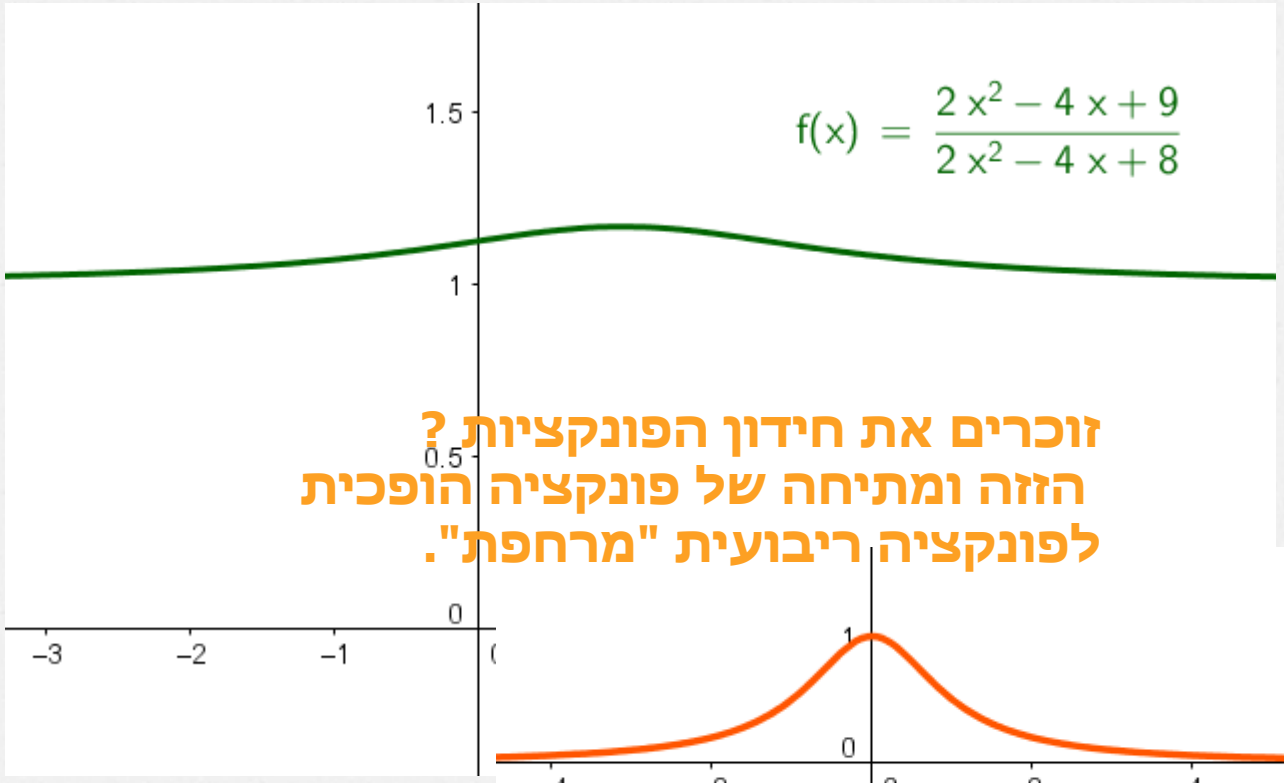
א. היכן צריכה מכונית המדריכים לעצור, כדי שמסלול הריצה יהיה הקצר ביותר האפשרי?

ב. היכן צריכה מכונית המדריכים לעצור, כדי שמסלול הריצה יהיה הארוך ביותר האפשרי?

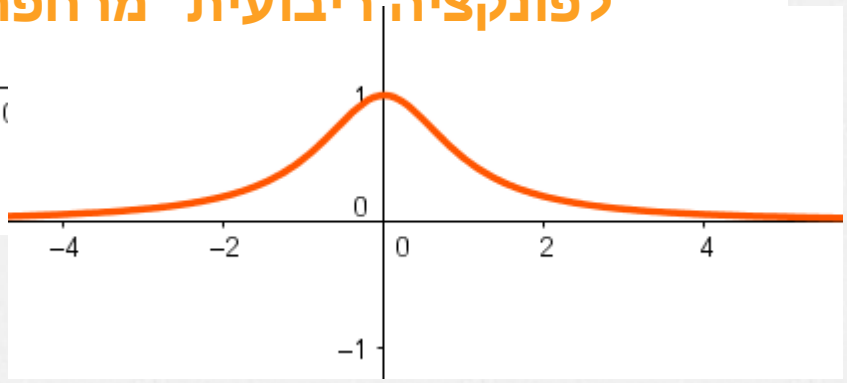
משימה מס' 2

מהו ערך המינימלי של הפונקציה:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 9}{2x^2 - 4x + 8}$$



זוכרים את חידון הפונקציות ?
הזזה ומתיחה של פונקציה הופכית
לפונקציה ריבועית "מרחפת".



פתרון משימה מס' 2

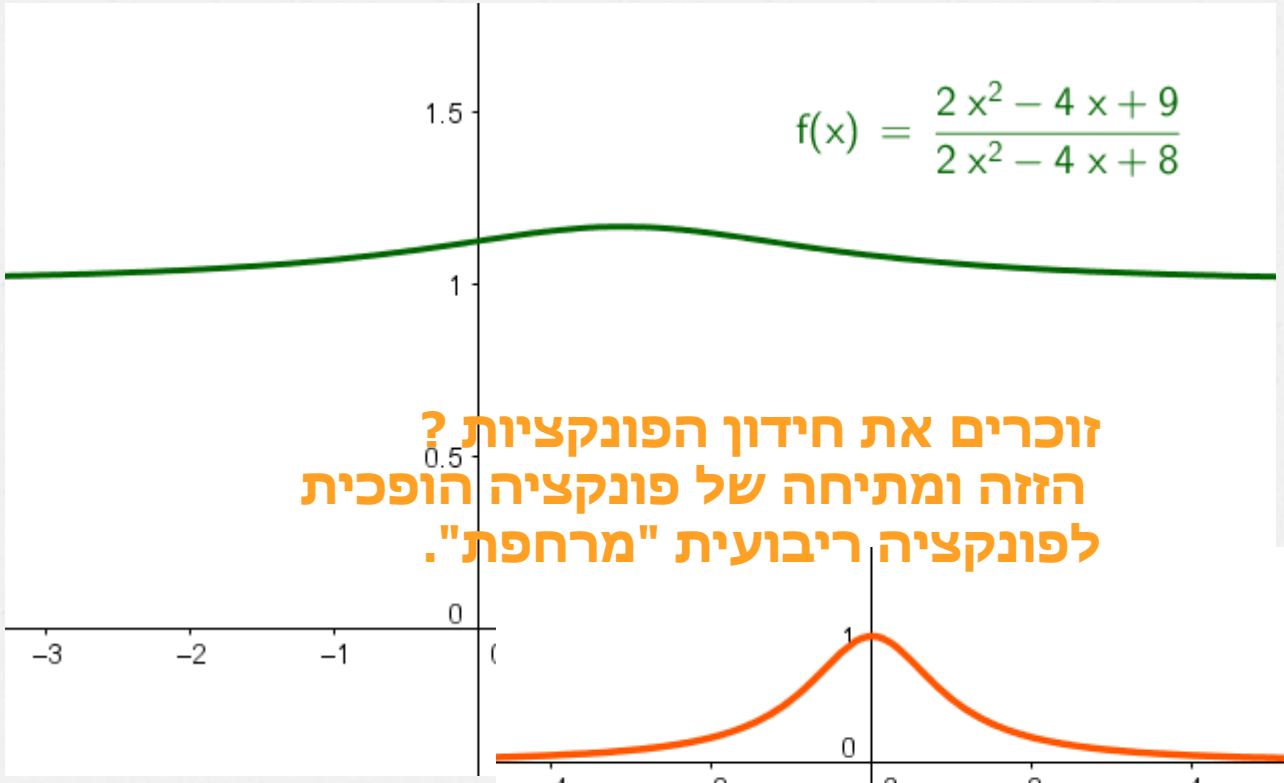
$$y=\frac{2x^2-4x+9}{2x^2-4x+8}=\frac{(2x^2-4x+8)+1}{2x^2-4x+8}=$$

$$=\frac{1}{2x^2-4x+8}+1=$$

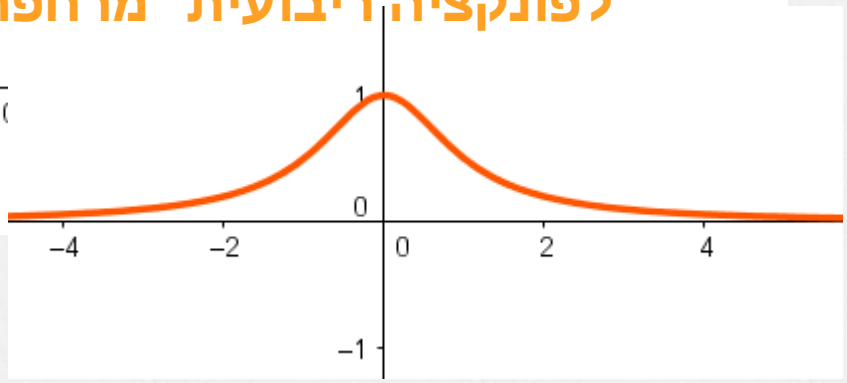
$$=\frac{1}{2(x^2-2x+4)}+1=1+\frac{1}{2\left[(x-1)^2+3\right]}$$

קודקוד מינימום הפרבולה (1,6)

נק' המקסימום של הפונקציה: $(1,\frac{7}{6})$



זוכרים את חידון הפונקציות ?
הזזה ומתיחה של פונקציה הופכית
לפונקציה ריבועית "מרחפת".



משימה מס' 3

משימה מס׳ 3
מצא את הערך המינימלי של הפונקציה:

$$y=(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)+9$$

פתרון משימה מס' 3

$$y=\left[(x-1)(x-6)\right]\cdot\left[\left(x-2\right)\left(x-5\right)\right]+9=$$

$$=\left[\left\langle x^2-7x\right\rangle+6\right]\cdot\left[\left\langle x^2-7x\right\rangle+10\right]+9=$$

$$=\left(x^2-7x\right)^2+10\left(x^2-7x\right)+6\left(x^2-7x\right)+60+9=$$

$$=\left(x^2-7x\right)^2+16\left(x^2-7x\right)+69=$$

$$=\left(x^2-7x\right)^2+16\left(x^2-7x\right)+64+5$$

$$y=\left(x^2-7x+8\right)^2+5$$

מהו ערך המינימלי של הפונקציה:

$$y=\left(x^2-7x+8\right)^2+5 \quad ?$$

כאשר

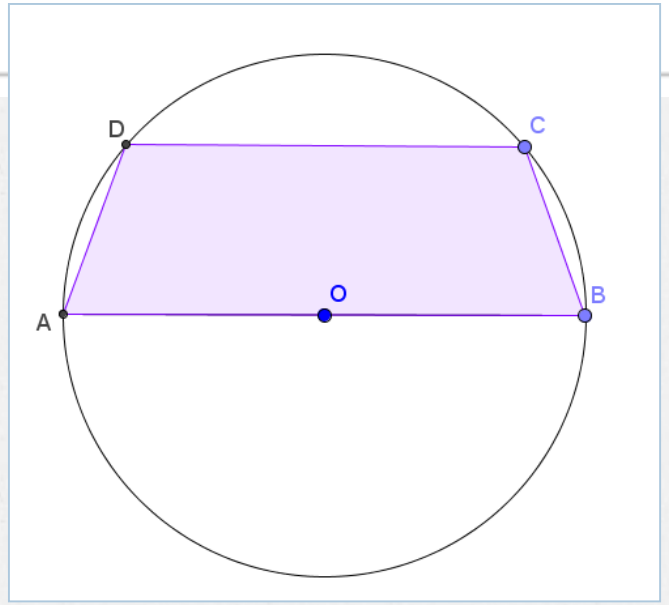
$$x^2-7x+8=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$$

החופש בבחירת המשתנה החופשי של פונקציית המטרה

בחצי מעגל שאורך מחוגו 4 ס"מ חוסמים טרפז, כך שבסיסו הוא קוטר המעגל.

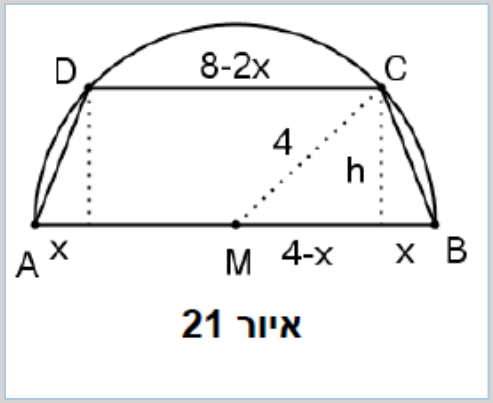
מבין כל הטרפזים שניתן לחסום באופן זה בחצי מעגל, מצאו את הטרפז בעל השטח המקסימלי ואת שטחו.



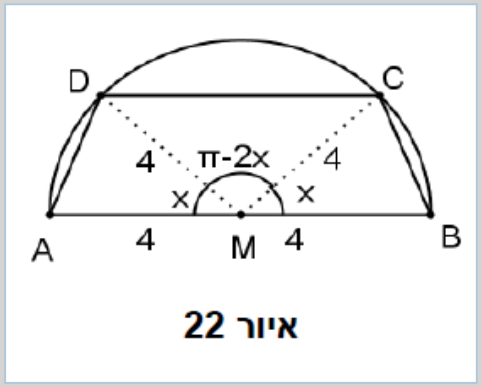
מתוך ללמוד וללמד אנליזה – עמ 519-521

משתנים שונים - פתרונות שונים

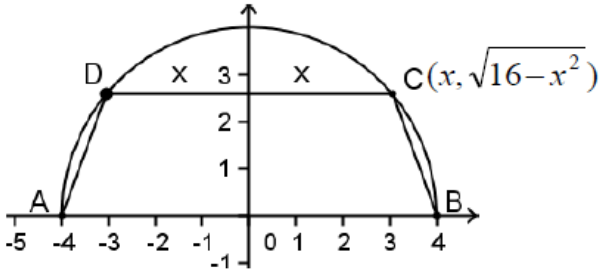
פתרון א'	פתרון ב'	פתרון ג'
$h=\sqrt{4^2-(4-x)^2}$ $h=\sqrt{8x-x^2}$	$S_1=S_3=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin x$ $S_2=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin(\pi-2x)$ $S_{\text{טרפז}}=16\sin x+8\sin(\pi-2x)$	$y=\sqrt{16-x^2}$ $h_{\text{טרפז}}=\sqrt{16-x^2}$ $a=2x$ $b=8$ $S(x)=\frac{1}{2}(2x+8)\sqrt{16-x^2}$



איור 21



איור 22



איור 25

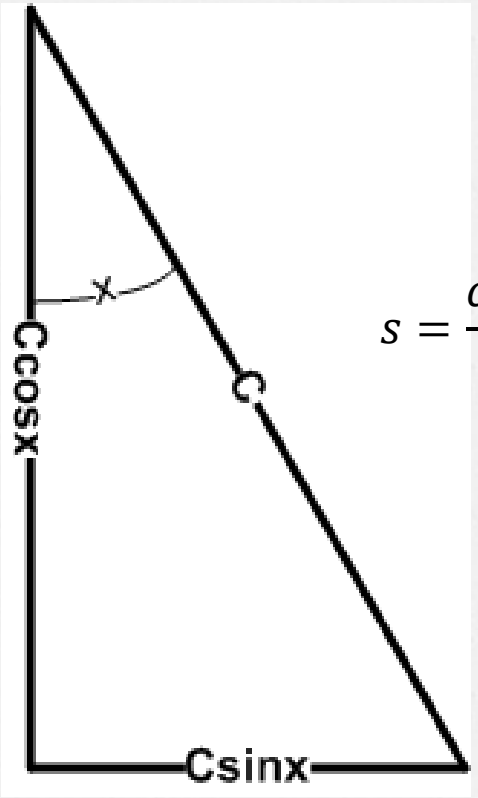
פתרון בעיות **בדרכים שונות** מסייע לתלמידים לפתח **גמישות**, ומונע קיבעון ותלות בדרך פתרון אחת ספציפית, שעלולה להיות לא יעילה במקרים מסוימים.

לכן לעתים פתרון של בעיה אחת בדרכים שונות תורם יותר מאשר פתרון של מספר בעיות.

מבין משולשי ישרי זווית בעלי היקף קבוע מצא משולש בעל שטח הגדול ביותר.

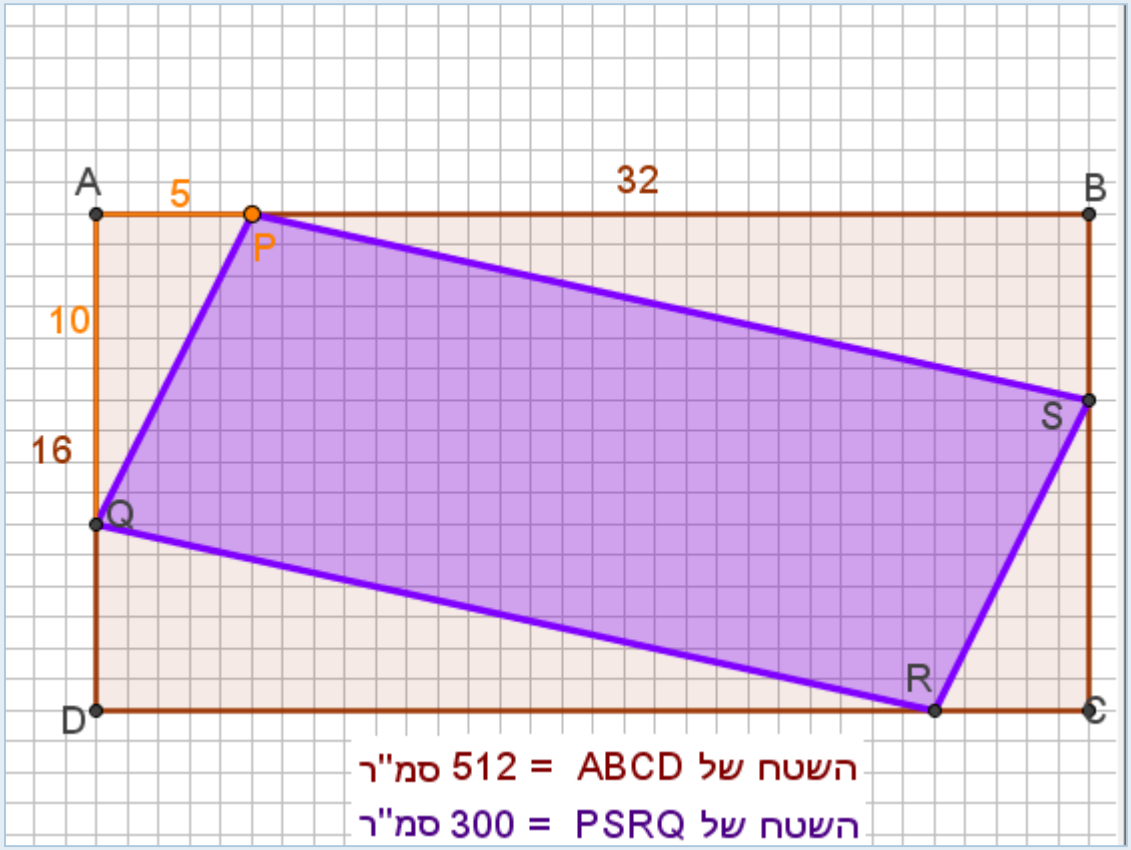
$$P = c(1 + sinx + cosx)$$

$$c = \frac{P}{1 + sinx + cosx}$$



$$s = \frac{c^2 sinxcosx}{2} = \frac{c^2 sin2x}{4} = \frac{P^2 sin2x}{4(1 + sinx + cosx)^2}$$

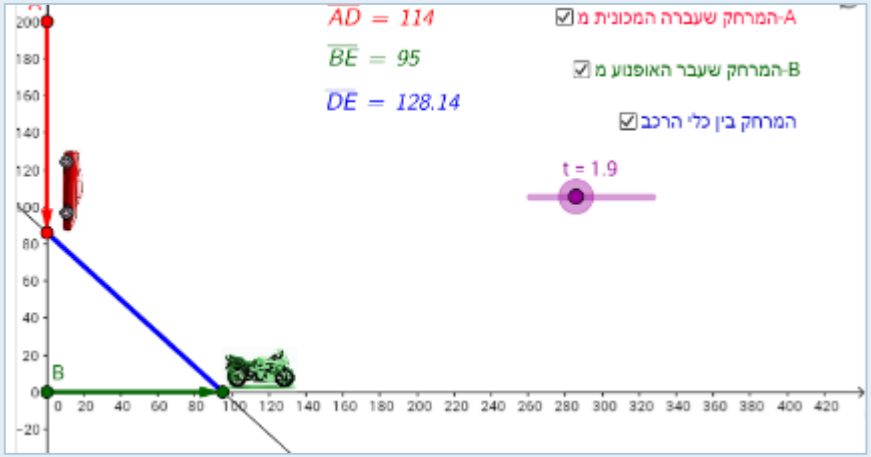
בעיות ערך קיצון דינאמיות



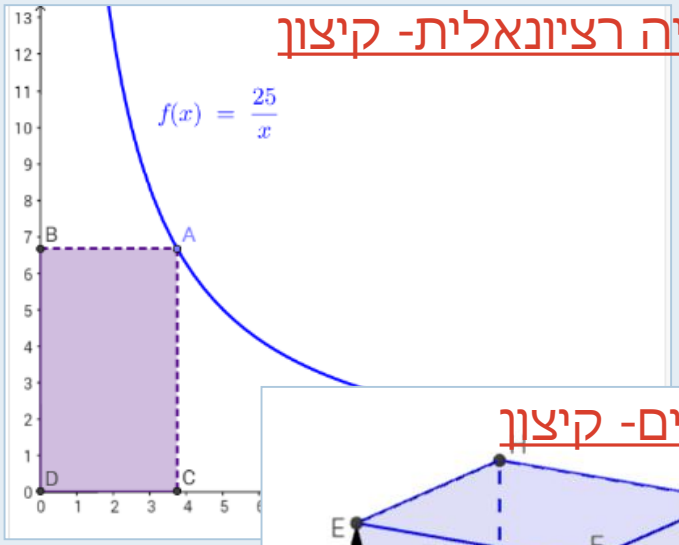
בבעיה זו יש להתחשב במציאת המקסימום גם בתחום ההצבה של הפונקציה.

בעיות ערך קיצון דינאמיות

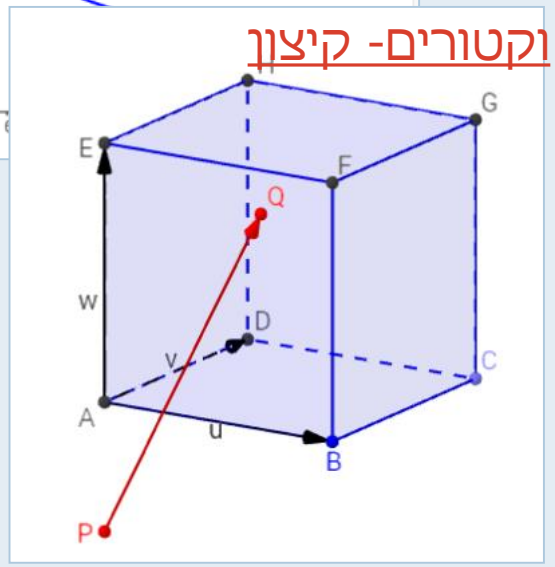
בעית תנועה - קיצון



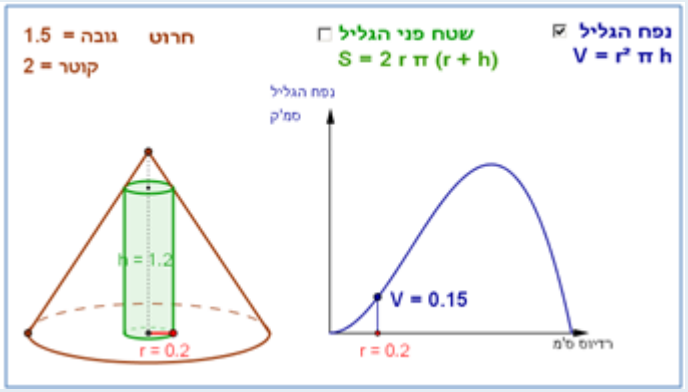
פונקציה רציונאלית- קיצון



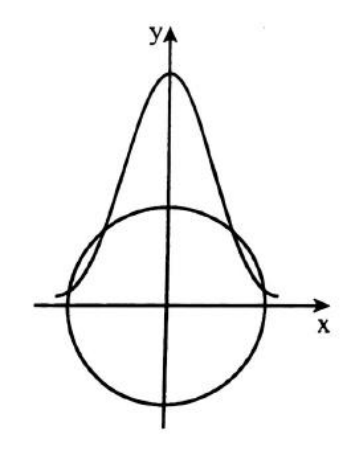
וקטורים- קיצון



נפח גליל חסום בחרוט



שאלון 807, קיץ תשע"ב, שאלה 4.



נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2-0.5x^2}$.
מעגלים שמרכזם בראשית הצירים
נפגשים עם גרף הפונקציה (ראה ציור).
מבין כל הרדיוסים של מעגלים אלה
מצא את הרדיוסִ המינימלי.

דף עבודה ויישום דינאמי המבוססים על שאלה מבחינת בגרות.
מרכז המורים

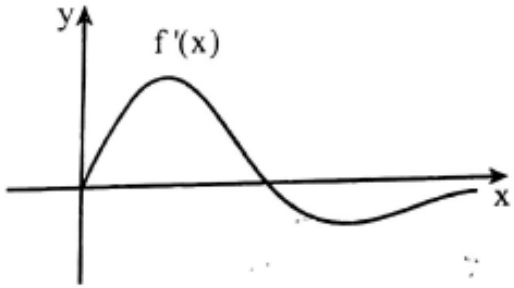
ב. מצא על גרף הפונקציה $f(x) = 2^x$ את הנקודה הקרובה ביותר לישר $y = x \cdot \ln 4$.

נתונה הפונקציה $f(x)=(x^2-a)e^{-0.5x^2}$ המוגדרת לכל x. a הוא פרמטר.

א. (1) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמק.

(2) האם פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמק.

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x \geq 0$.



בתחום זה יש לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ מקסימום מוחלט ומינימום מוחלט, כמתואר בציור.

אחת מנקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה-x היא נקודה שבה $x=\sqrt{\frac{5}{2}}$.

ב. מצא את שיעורי ה- x (ערכים מספריים) של המקסימום המוחלט ושל המינימום המוחלט של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x \geq 0$.

ג. שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בכל תחום ההגדרה שלה.

ד. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה שבה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא:

(1) הגדול ביותר בכל תחום הגדרתה. נמק.

(2) הקטן ביותר בכל תחום הגדרתה. נמק.

נתונה הפונקציה $f(x)=(\ln x)^2+x$, $x>0$ (ראה ציור),
ונתון הישר $y=x-4$.
נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$,
ונקודה B נמצאת על הישר הנתון.

א. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB ,
אם הקטע מקביל לציר ה- y .
ב. מצא את האורך המינימלי של הקטע AB ,
אם הקטע מאונך לישר הנתון.
ג. מבין כל הקטעים AB האפשריים,
מהו האורך המינימלי של הקטע AB ? נמק.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{kx}{\ln x}$, k הוא פרמטר שונה מ- 0 .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצא עבור אילו ערכים של k לפונקציה $f(x)$ יש מקסימום.

נתון כי בתחום $x>1$ הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים $y\le -2$ ורק אותם.

(2) מצא את הערך של k .

(3) נתון גם כי הישר $x=1$ הוא האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בכל תחום הגדרתה.

ג. מבין המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x>1$, מצא את נקודת ההשקה של המשיק ששיפועו מינימלי.

נתון משולש שאחת מצלעותיו היא 10 ס״מ, וגובה המשולש לצלע זו הוא 5 ס״מ. (המשולש אינו קהה-זווית.)

א. מבין כל המשולשים שהם כאלה, מצא את צלעות המשולש שהיקפו מינימלי.

ב. מה הן תכונות המשולש שאת צלעותיו מצאת בסעיף א׳?

בניית מודלים להמחשת פתרונות יצירתיים בנושא של בעיות ערך קיצון

עבד אל סאלם סעאבנה