



מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

**הכי טוב שיש**

**סדנא בפתרון בעיות קיצון**

סרגיי לייקין

שמרית יוליס

יוליה גורביץ' דגמי

צוות המועדון



## מבוא

מתוך הספר "ללמוד וללמד אנליזה", בעיות ערך קיצון, הטכניון

האפשרות למצוא את הפתרון הטוב ביותר מבין מגוון פתרונות אפשריים לבעיה נתונה היא אחד הביטויים לעצמתה של מתמטיקה. הכלים של החשבון דיפרנציאלי הם כלים מרכזיים בהשגת מטרה זו. בעת פתרון בעיות ערך קיצון התלמידים נחשפים להיבט יישומי רב עצמה של המושגים והכלים של החשבון הדיפרנציאלי. מכאן חשיבות הגדולה של הוראת נושא זה. בכל רמות הלימוד. הבלטת האתגר למצוא את הפתרון הטוב ביותר, מאפשר לבנות את השיעורים בדרך המעוררת סקרנות ועניין ולהמשיך ולתרגל חקירת פונקציות מכל הסוגים, תוך הקשר משמעותי המעמיק את ההבנה.

למרות החשיבות הרבה של הנושא, תלמידים רבים חווים קושי בהתמודדות עם בעיות ערך קיצון. קשיים בהבנת הנקרא, קשיים אלגבריים והקושי להגדיר משתנים ולייצג בעזרתם את נתוני הבעיה משותפים לפתרון בעיות ערך קיצון ולפתרון בעיות מילוליות אחרות. קשיים אחרים, למשל, הקושי לראות את השרטוט המופעי בנתוני השאלה.

מטרות הסדנא הן:

- להדגיש מטרת פתרון בעיות ערך קיצון – מציאת הפתרון הטוב ביותר ודיון בקשיים של התלמידים בלימוד הנושא.
- להציג מספר אפשרויות לפתיחת הנושא בכיתה כגון למידה שיתופית, משימות בנייה וחקר. יצירת דיון ושיתוף בקהילה ברעיונות נוספים.
- פתרון בעיות ערך קיצון בדרכים שונות, כולל דרכים ללא שימוש בכלים של חשבון דיפרנציאלי
- לעודד חשיבה איכותנית וביקורתית בפתרון בעיות ערך קיצון.
- להכיר ייצוגים שונים לפתרון בעיות בבעיות קיצון.

## רקע הסטורי

ההיסטוריה של התפתחות של בעיות ערך קיצון מתחלקת לשתי תקופות:

- לפני גילוי כלים כלליים לפתרון בעיות ערך קיצון – חשבון דיפרנציאלי (2500 שנה עד לפני 300 שנה)
- אחרי גילוי חדו"א לפני 300 שנה

ההיסטוריה של בעיות ערך קיצון מתחילה משתי בעיות ידועות: **בעיית הרון ובעיית דידו**.

**בעיית הרון** היא בעייה של מהנדס ומתמטיקאי יווני מהמאה הראשונה לספירה, הידוע כהרון מאלכסנדריה, ומוכר לנו בזכות הנוסחה לשטח משולש על פי אורכי צלעותיו. הרון הזכיר בעיה זו בספרו "על המראות" ובו ניתח לא רק בעיות קיצון אלא גם קשרים בין תחומיים: הוא דיבר על החזרת קרני אור ע"י עדשה פרבולית.

**בעיית דידו** היא בעיה מהעת של יוון העתיקה ומוזכרת במחזה "איניאידה". הנסיכה מבקשת ממושל "לקנות חלקת אדמה שניתן להקיף באמצעות עור של פר"

### אגדה עתיקה<sup>1</sup>

פובליוס וירגיליו מארוס, מגדולי המשוררים של רומא העתיקה, מספר ביצירתו "איניאידה" על מנוסתה של הנסיכה הפיניקית דידו מפני אחיה. בהגיעה לקרתגו, שטחה בפני המושל בקשה צנועה: דידו ביקשה לרכוש חלקת אדמה שניתן להקיף באמצעות עור של פר. כשבקשתה נענתה, חתכה דידו את עור הפר לרצועות דקות, קשרה אותן זו לזו, והקיפה חלקה בצורת עיגול. כעבור 2600 שנה הוכח בצורה מתמטית שמכל הצורות בעלות היקף נתון, הצורה ששטחה מקסימלי היא עיגול.

<sup>1</sup> מבוסס על לטנר וזיסקין (1998) ועל טיחומירוב (2000).

מתוך ללמד וללמוד אנליזה, עמ 500.

## סוגיות מפתח בפתרון בעיות קיצון בסדנה

- עיקרון הסימטריה
- הזזות ומתיחות של פונקציות - טכניקה אלגברית
- הצבות טריגונומטריות
- כלים של חדו"א

## מהלך הסדנה

1. שאלות חימום
2. פתיחה: דיון "איך אני פותח את הנושא"? (סבב משתתפים)
3. דוגמאות לפתיחת נושא: (בחר אפשרות אחת)
  - "למידה שיתופית"
  - פעילות חקר
  - יישומון דינמי
4. הצגה של בעיות הניתנות לפתרון ללא שימוש בכלים של חדו"א
5. הפסקה
6. הצגת שאלות הניתנות לפתרון ע"י עקרון הסימטריה
7. טריגונומטריה בשירות האנליזה
8. דיון ומסקנות



8.

## ביבליוגרפיה:

1. טיכומירוב "סיפורים על מקסימום ומינימום"
2. ללמוד וללמד אנליזה
3. פיצויים מתמטיים, מרכז ארצי למורים למתמטיקה העל יסודי
4. פרופ' רוזה לייקין: למידה שיתופית
5. פרופ' רוזה לייקין, פתרון בעיות בעזרת סימטריה