מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

גלגולה של בעיה

עדה לוי, גלינה פלדמן וסבאח חאג מרון

צוות מועדון ה- 5

1. גילגולה של בעיה:

<u>הקדמה:</u>

בעיה זו נלקחה מאחד מספרי המיקוד. הבעיה הוצגה בכיתה בשיעור הכנה לקראת בחינה, התלמידים עבדו בקבוצות, חלק קיבל את התשובה שהופיעה באותו ספר, אך אחרים קיבללו תשובות אחרות. כשהציגו את פתרונותיהם, הכל נראה תקין ונכון, ואז התחיל המסע המרתק.

המסע התחיל בחיפוש אחרי הסבר מתאים לסתירה שהתקבלה, והמשיך בחקירה דינמית של הבעיה. השלב הראשון היה ניסיון כושל לבנות את הבעיה באמצעות הגיאוגברה ולהכניס בה את כל הנתונים שבשאלה. אחרי זה התחילו הניסיונות לבנות את הבעיה כאשר כל פעם מזניחים אחד מהנתונים, ואז התקבלה הבעיה 2 (המתוקנת- עם הוספת סעיף 2ב). שלב שלישי היה חיפוש פתרונות שונים לערך של הזווית.

במהלך ניתוח הבעיה ונתוניה חקרנו את מעגל אפולוניוס ומשפטי חוצי זוויות (הפנימית והחיצונית). יתרונה של הבעיה בפיתוח חשיבה ביקורתית ויצירתית וכן בהרחבה ובהעמקה, למרות שגם משפט חוצה זווית חיצונית וגם מעגל אפולוניוס לא נמצאים בתוכנית הלימודים.

למורים ולתלמידים מתקדמים אפשר להרחיב את החקירה למקומות גיאומטריים דומים נוספים.

מהלך הפעילות:

1. נציג את הבעיה הראשונה לכל מורה בקהילה, ניתן זמן לפתרון. (כ- 7 דקות).
2. נבקש מכל מורה לתת את התשובה שלו לערך של הזווית $\measuredangle ADB$. (כ- 2 דקות).
3. במקרה ויהיו תשובות שונות נדון בבעיה, ואם לא אז ניתן להציג פתרונות שונים עם תשובות שונות. (10 דקות).
4. אחרי זה ניתן את הבעיה 2 (המתוקנת), כאשר מחליפים את הנתון: $CD = 4\ c''m$ בנתון: $BE = CD = 4\ c''m$

   ונאפשר להם לפתור. (7 דקות).

5. הצגת פתרונות המשימה. (5 דקות).
6. נציג פתרון לפי מעגל אפולוניוס. (5 דקות).
7. נציג את מעגל אפולוניוס, את ההגדרה והקשר למשפט חוצה זווית פנימית וחיצונית, נציג את השקילות להגדרה הסטנדרטית של המעגל. (5 דקות).
8. ניתן לסכם על ידי שימוש ביישומים את השימוש בפעולות החשבון השונות (סכום, חיסור,מנה וכפל מרחקים משתי נקודות קבועות, ואת העקומות המתקבלות (אליפסה, היפרבולה, מעגל אפולוניוס ועקומת Cissini. (5 דקות).

בעיה 1:

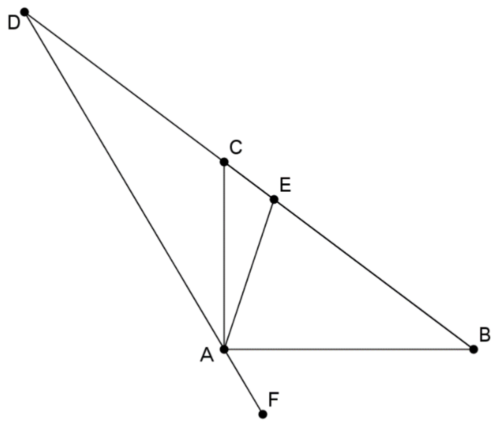
נתון משולש ישר זווית ABC $(\measuredangle BAC = 90°)$.

הישר DF עובר דרך קודקוד A . קודקוד D נמצא על המשך צלע BC. AC חוצה את הזווית $\measuredangle DAE$.

נתון כי :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{1}{4}$$

$BE = CD = \; 4 \;\; c''m$.



א. חשב את אורך BC.

ב. נתון כי המשולש ABC חסום במעגל, וכי AD משיק למעגל זה בנקודה A.

1. הוכח כי: $\Delta AEB \sim \Delta CAB$.
2. חשב את הזווית $\measuredangle ADB$.

בעיה 2: (מתוקנת)

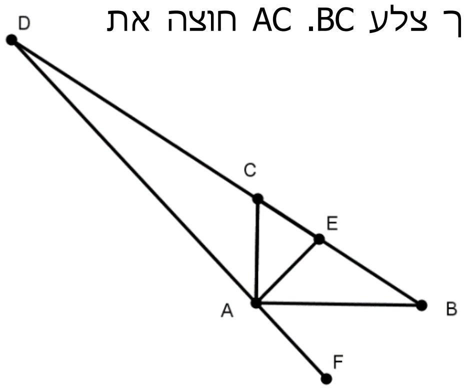
נתון משולש ישר זווית ABC $(\measuredangle BAC = 90°)$.

הישר DF עובר דרך קודקוד A . קודקוד D נמצא על המשך צלע BC. AC חוצה את הזווית $\measuredangle DAE$.

נתון כי :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{1}{4}$$

$CD = \; 4 \;\; c''m$.



א. מצא את אורך CE.

ב. נתון כי המשולש ABC חסום במעגל, וכי AD משיק למעגל זה בנקודה A

1) הוכח כי: $\Delta AEB \sim \Delta CAB$

2) הוכח כי $\mathrm{BE} = \frac{5}{3} \; c''m$

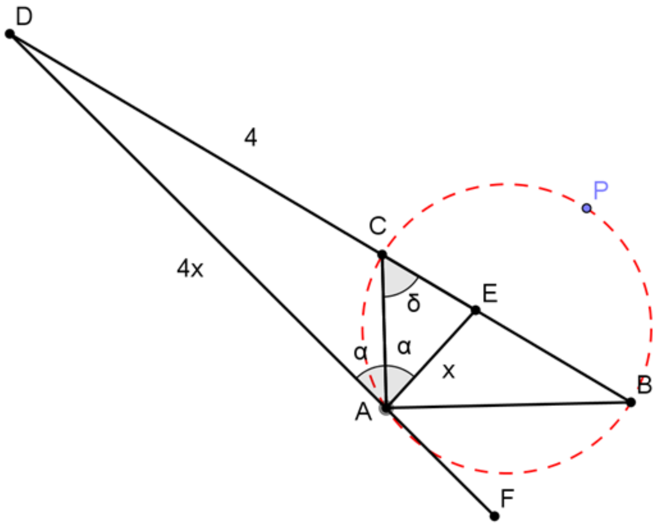
3) חשב את הזווית $\measuredangle ADB$.

<u>שאלות מנחות לדיון:</u>

1. לאיזה תחום מתמטי ניתן לשייך למשימה זו?
2. אילו נימוקים ניתן לתת על מנת להסביר את הסתירות?
3. אילו שאלות ניתן לשאול על מנת שהתלמידים יחשפו בעצמם את הסתירות?
4. האם הייתם מציגים שאלה זו בכיתה? מתי? איך?
5. האם הייתם מעדיפים לתת לתלמידים לנסות לבנות את המשימה בגיאוגברה כדרך הוכחה על הבעייתיות שלה?

פתרון המשימה

פתרון 1: טריגונומטריה



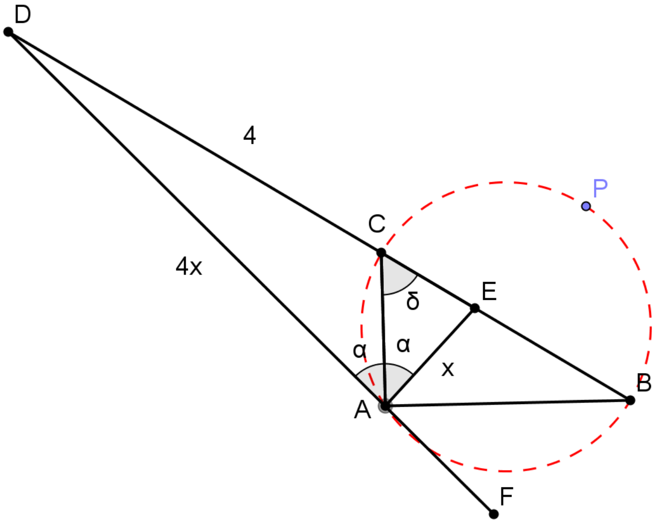
פתרון סטנדרטי: $\frac{EC}{DC}=\frac{AE}{AD}$	משפט חוצה הזווית
$\frac{AE}{AD}=\frac{1}{4}$	נתון
$\frac{EC}{DC}=\frac{1}{4}$	הצבה
$\frac{EC}{4}=\frac{1}{4}$	הצבה
$\mathrm{EC}=1$	חישוב
$\frac{x}{sin\delta}=\frac{1}{sin\alpha}$	משפט סינוסים במשולש ΔACE
$x=\frac{sin\delta}{sin\alpha}$	*
$\frac{4x}{\sin(\alpha+\delta)}=\frac{x}{\sin(\delta-\alpha)}$	משפט סינוסים במשולש ΔAED
$\frac{tg\delta}{tg\alpha}=\frac{5}{3}$	פישוט ושימוש בזהות: $\sin(\delta\pm\alpha)$ **
$\frac{x}{\sin(90°-\delta)}=\frac{EB}{\sin(90°-\alpha)}$	משפט סינוסים במשולש ΔAEB
$EB=\frac{xcos\alpha}{cos\delta}$	
$EB=\frac{\frac{sin\delta}{sin\alpha}cos\alpha}{cos\delta}$	הצבת *
$EB=\frac{tg\delta}{tg\alpha}$	***
$EB=\frac{tg\delta}{tg\alpha}=\frac{5}{3}$	הצבת ***

פתרון 2: גיאומטריה

א.	$\frac{CE}{CD}=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{4}$	משפט חוצה זווית (AC)
	$\frac{CE}{4}=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{4}$	
	$CE=1\ c''m$	
1.	$\measuredangle DAC=\measuredangle CBA=\alpha$	זווית בין משיק ליתר
א.	$\measuredangle CAE=\measuredangle CBA=\alpha$	(ז)
	$\measuredangle EAB=\measuredangle ACB=90°-\alpha$	(ז)
	$\measuredangle CAB=\measuredangle AEB=90°$	חישוב זוויות (ז)
	$\Delta AEB\sim\Delta CAB$	ז.ז.ז
ב-1	$\measuredangle AEC=90°$	צמודה ל- $\measuredangle AEB=90°$
	$AD^2=AE^2+ED^2$	לפי פיתאגורס במשולש ישר הזווית ΔAED
	$(4AE)^2=AE^2+5^2$	
	$15AE^2=5^2$	
	$AE^2=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$	*
	$\Delta AEC\sim\Delta BEA$	ז.ז.ז
	$\frac{AE}{BE}=\frac{EC}{EA}=\frac{AC}{BA}$	
	$AE^2=EC\cdot BE$	
	$AE^2=1\cdot BE$	

	$BE = AE^2 = \frac{5}{3}$	מ-*
ב-2	במשולש ΔAED: $\sin \measuredangle D = \frac{AE}{AD}$	
	$\sin\alpha = \frac{1}{4}$	
	$\alpha = 14.4775°$	

פתרון 3- אלגנטי: מעגל אפולוניוס



א. הנקודות C ו- A נמצאות על מעגל אפולוניוס המקיים (P):

$\frac{PE}{PD}=\frac{1}{4}$, וכמו כן הנקודה B. (קצה היתר)

ולכן מתקיים היחס: $\frac{BE}{BD}=\frac{1}{4}$.

ולכן: $\frac{BE}{BE+5}=\frac{1}{4}$

מקבלים: $BE=\frac{5}{3}$.

ב. $AD^2=BD*DC$ (ריבוע המשיק שווה לחותך כפול חלקו החיצוני)

$$AD^2=\left(5+\frac{5}{3}\right)*4$$

$$AD=5.164\ c"m$$

על ידי חישוב זוויות : $\measuredangle DEA=90°$ (זווית בין משיק למיתר וחישובי זוויות).

$$cos\measuredangle ADE=\frac{DE}{AD}=\frac{5}{5.164}$$

$$\measuredangle ADE=14.478°$$