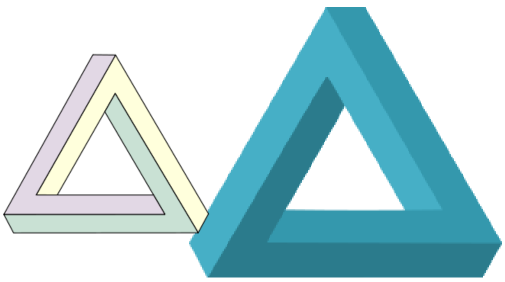
מועדון ה-5 – קהילות מורים למתמטיקה ברמת 5 יח"ל

האם תמיד אותו השטח?

דרכים לחישוב שטח משולש, בשלבים שונים של הלמידה ובהקשר לנושאי לימוד שונים

עדה לוי וניצה בן יואש



THE TRUMP FOUNDATION
קרן טראמפ
מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية
חמ"ה
מרכז אינטר-דיסציפלינארי חקר, חינוך, מחוננות והצטיינות
אוניברסיטת חיפה
University of Haifa
جامعة حيفا

מבוא

זו בעייה שפתרונה פשוט בכל דרך שנבחר לפתור. היא אינה דורשת תחכום או מניפולציות אלגבריות מסובכות.

פתרון הבעייה מדגיש, שלעיתים ה"משבצת" בה מופיעה שאלה (למשל בגיאומטריה אנליטית בכיתה יב) אינה בהכרח "מנבאת" את ההקשר המתמטי הנוח לפתרון.

מספר הדרכים לפתרון גדול מאוד.

הבעיה מדגימה יפה את הקשר בין משפט הקוסינוסים למכפלה סקלרית, ואת הקשר בין מספרים מרוכבים לטריגונומטריה.

מהלך הסדנה

הצגת השאלה

זמן למשתלמים לחשוב על פתרון – 15 דקות

דיון מקדים - 15 דקות

- באיזה נושא הייתם משלבים שאלה זו?
- באיזה שלב בלמוד מתמטיקה? לאיזו כיתה?
- האם תוכלו לחשב את השטח בדרך אחרת?

הצגת הפתרונות ודיון בשלבי הצגת ההוכחה בתוך תוכנית הלימודים – 30 דקות

הנחיות והמלצות

- כדאי להקפיד שהמורים יציגו פתרונות מושלמים על מנת שיוכלו לחוות את יעילות הפתרונות השונים
- בחלק מהצעות הפתרון, מצורף יישומן גיאוגברה שהקישור אליו יפתח ע"י הקלקה על נושא הפתרון.
- בסוף הסדנא, אם אף אחד לא שם לב, כדאי להפנות את תשומת לב המורים כי:

שיפועו של AB הוא $m_{AB}=\frac{4-2}{5-1}=\frac{1}{2}$

שיפועו של BC הוא $m_{BC}=\frac{8-4}{3-5}=-2$

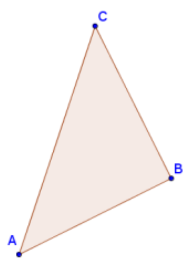
מכפלת השיפועים היא -1 ולכן הישרים מאונכים זה לזה, והמשולש ישר זווית וכדי למצוא את השטח נוכל נסתפק בחישוב שני אורכים.

- וכדאי גם להתייחס לכך, שהמשולש הוא גם שווה שוקיים.......

משימה

נתון משולש שקודקודיו בנקודות A(1,2) , C(3,8) , B(5,4)

מה שטחו?



הצעה לפתרונות

1. <u>**הנדסה אנליטית**</u>

חישוב אורך צלע AC $|AC| = \sqrt{(8-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

חישוב שיפוע הישר עליו נמצאת AC $m = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$,

ומציאת הישר $AC: y = 3x - 1 \quad \rightarrow \quad y - 2 = 3(x-1)$

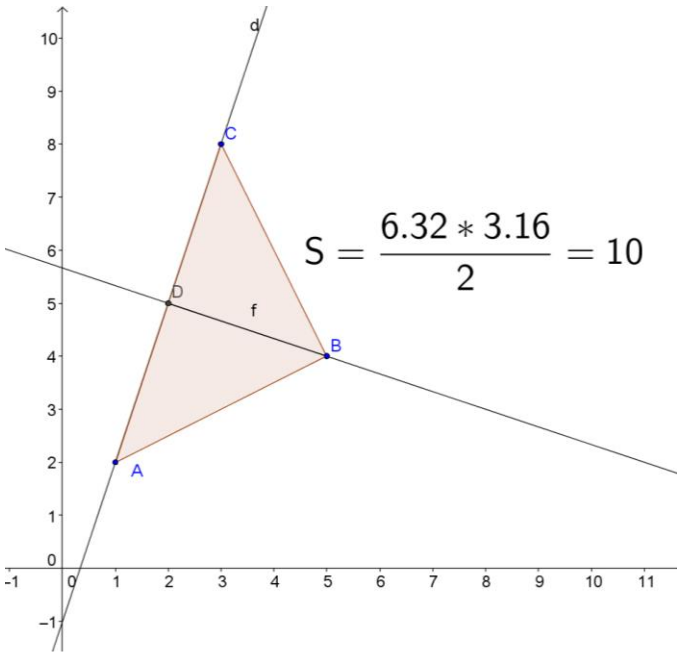
העברת ישר מאונך לישר עליו נמצאת הצלע מהקודקוד השלישי

$BD: y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} \quad \rightarrow \quad y - 4 = -\frac{1}{3}(x-5)$,

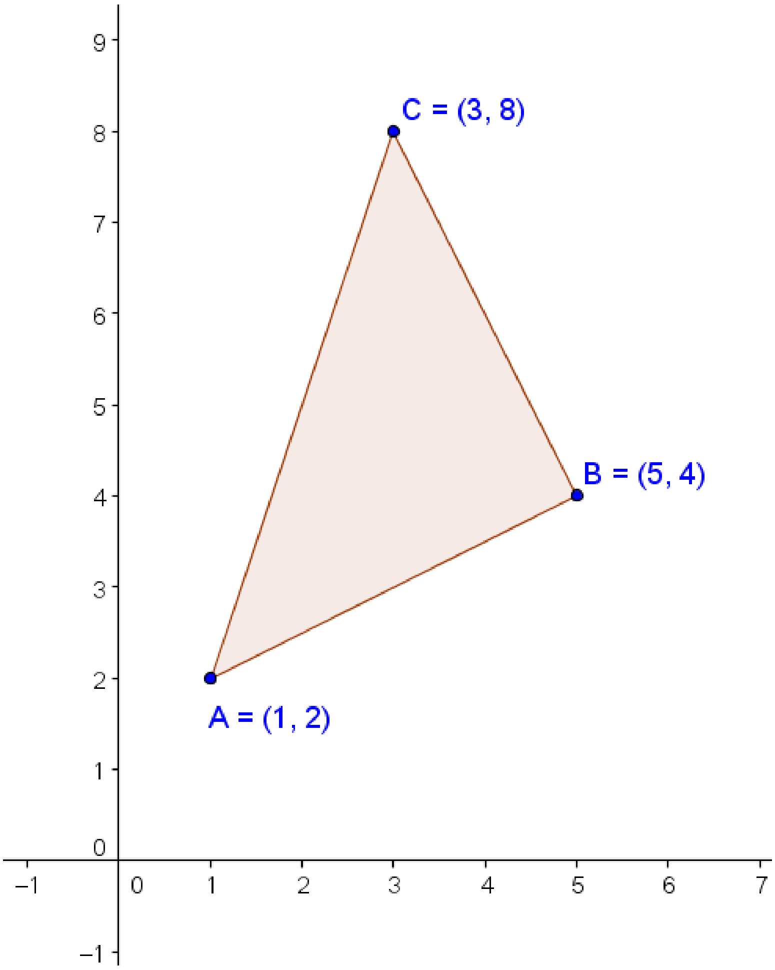
מציאת נקודת החיתוך בין הישרים AC ו- BD $D(2,5)$

חישוב אורך הגובה $|BD| = \sqrt{(5-2)^2+(4-5)^2} = \sqrt{10}$

וחישוב שטח המשולש $\boldsymbol{S = \frac{2\sqrt{10}\sqrt{10}}{2} = 10}$



2. הנדסה אנליטית



חישוב אורך צלע $|AC| = \sqrt{(8-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

חישוב שיפוע הישר עליו נמצאת AC $m = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$,

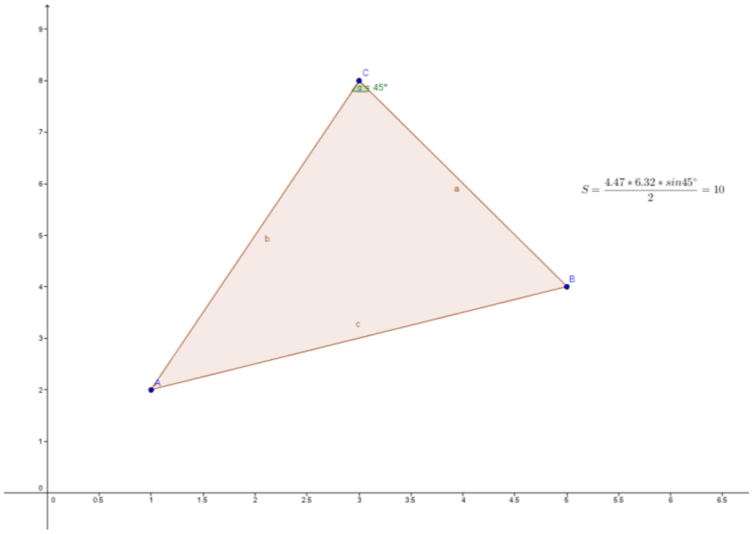
ומציאת הישר $y - 2 = 3(x-1) \rightarrow AC: y = 3x - 1 \rightarrow 3x - y - 1 = 0$

מרחק נקודה B מהישר AC הוא: $d = \frac{|3\cdot 5 - 4 - 1|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

ושטח המשולש הוא: $S = \frac{2\sqrt{10}\sqrt{10}}{2} = 10$

3. טריגונומטריה

חישוב זווית בין ישרים ואורך 2 צלעות



חישוב אורכי 3 צלעות, חישוב זווית לפי משפט הקוסינוסים

נחשב אורכי 3 הצלעות

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$|AC| = \sqrt{(3-1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{40}$$

$$|BC| = \sqrt{(3-5)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{20}$$

לפי משפט הקוסינוסים נחשב זוית $\measuredangle \mathrm{BAC}$:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)cos(\measuredangle \mathrm{BAC})$$

$$20 = 20 + 40 - 2\sqrt{20}\sqrt{40}\,cos(\measuredangle \mathrm{BAC})$$

$$cos(\measuredangle \mathrm{BAC}) = \frac{40}{2\sqrt{20}\sqrt{40}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \measuredangle \mathrm{BAC} = 45^0$$

ושטח המשולש

$$S = \frac{\sqrt{20}\sqrt{40}\,sin45^0}{2} = 10$$

4. וקטורים אלגבריים

נחשב את הזווית בין הישרים בעזרת מכפלה סקלרית

$$\overrightarrow{AC}=(2,6)\quad,\quad |AC|=\sqrt{40}$$

$$\overrightarrow{AB}=(4,2)\quad,\quad |AB|=\sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|AC||AB|\cos\measuredangle CAB$$

$$(2,6)\cdot(4,2)=\sqrt{40}\sqrt{20}\ \cos\measuredangle CAB$$

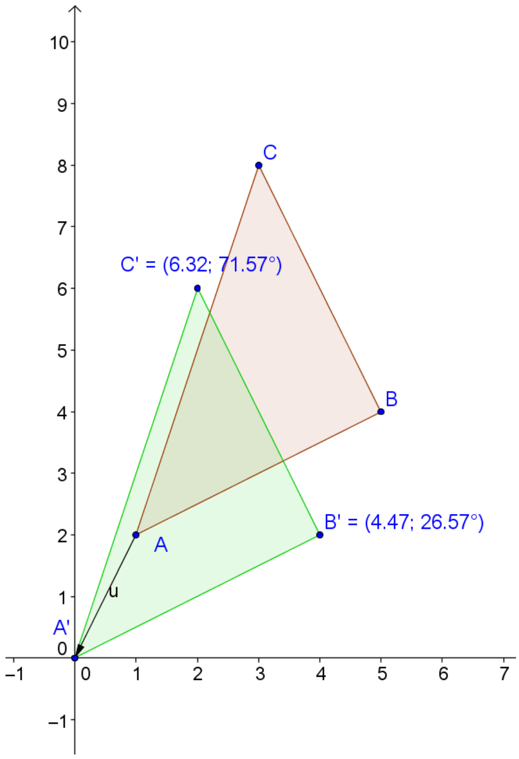
$$20=\sqrt{40}\sqrt{20}\ \cos\measuredangle CAB$$

$$\cos\measuredangle CAB=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\rightarrow\quad\measuredangle CAB=45^0$$

ולכן שטח המשולש $S=\frac{\sqrt{20}\sqrt{40}\,sin45^0}{2}=10$

5. מספרים מרוכבים

נזיז את המשולש לראשית הצירים



נציג אלגברית את המספרים המרוכבים

$A'C' = Z_1 = 2 + 6i$ $\qquad$ $A'B' = Z_2 = 4 + 2i$

נחשב את אורכם $|A'C'| = \sqrt{40}$ $\qquad$ $|A'B'| = \sqrt{20}$

נחלק מספר אחד בשני ונמצא את הארגומנט של המנה.

או, נעבור לייצוג פולרי :

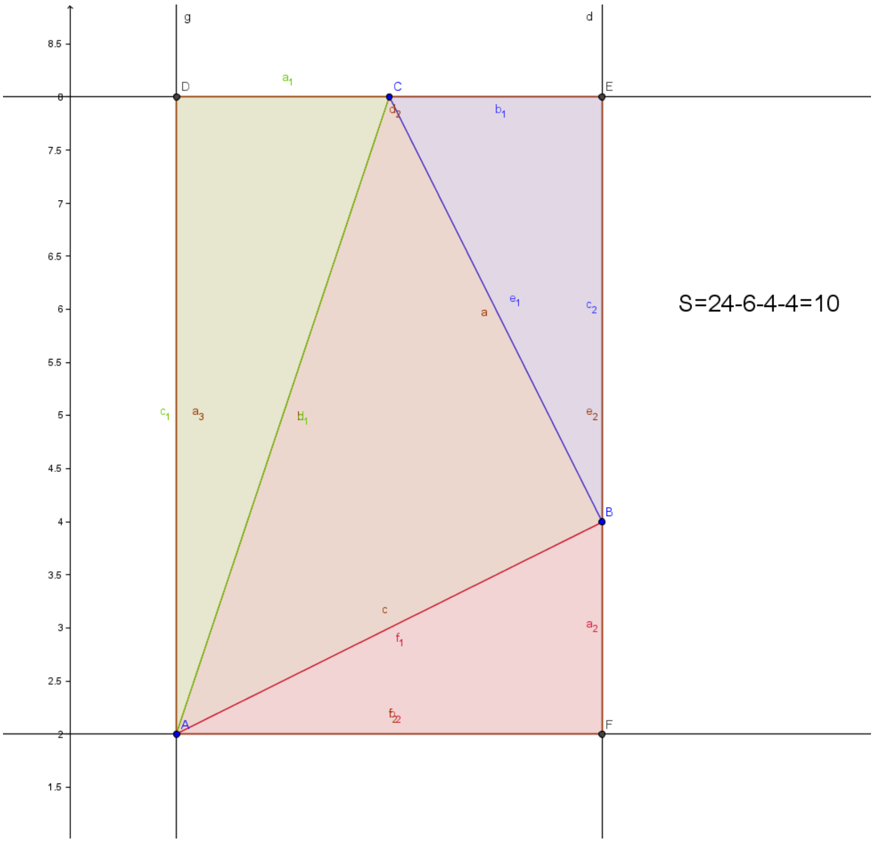
$A'B' = \sqrt{20}\ cis\ 26.56^0$ $\qquad$ $A'C' = \sqrt{40}\ cis\ 71.56^0$

ולכן הזווית בין הישרים $71.56^0 - 26.56^0 = 45^0$

ושטח המשולש $S = \frac{\sqrt{20}\sqrt{40}\ sin45^0}{2} = 10$

6. גיאומטריה

נבנה מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים ועובר דרך 3 הקודקודים הנתונים.



בשרטוט, מלבן ושלושה משולשים ישרי זווית

קודקודי המלבן $D(1,8)$, $E(5,8)$, $F(5,2)$, $A(1,2)$

ושטחו $S = 4 * 6 = 24$

שטח המשולש הירוק $S_1 = \frac{6*2}{2} = 6$

שטח המשולש הסגול $S_2 = \frac{4*2}{2} = 4$

שטח המשולש האדום $S_3 = \frac{4*2}{2} = 4$

ולכן שטח המשולש הנדרש הוא : $S = 24 - 6 - 4 - 4 = 10$

7. גיאומטריה

נחלק את המשולש המבוקש, לשני משולשים על ידי קטע מקביל לציר

X העובר דרך קודקוד B הקטע הוא חלק מהישר $y = 4$.

נמצא את נקודת החיתוך של הישר $y = 4$ עם הצלע

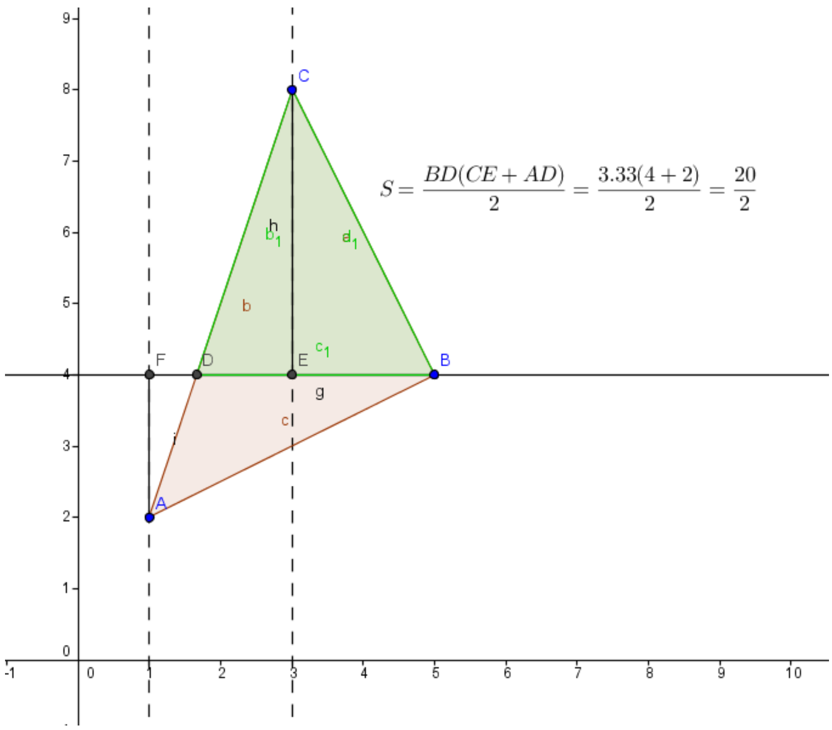
AC , $AC: y = 3x - 1$ הנקודה היא $D\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

הבסיס המשותף לשני המשולשים BD אורכו $\frac{10}{3}$.

המשולש הירוק גובהו $8 - 4 = 4$ ושטחו $S_1 = \frac{\frac{10}{3} * 4}{2} = \frac{20}{3}$

המשולש האדום גובהו $4 - 2 = 2$ ושטחו $S_2 = \frac{\frac{10}{3} * 2}{2} = \frac{10}{3}$

ושטח המשולש הוא $S = S_1 + S_2 = \frac{20}{3} + \frac{10}{3} = 10$



8. גיאומטריה

נוסחת היירון- $a\ ,\ b\ ,\ c\ \ -$ צלעות המשולש, p – מחצית היקף המשולש

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

9. הנדסה אנליטית

שטח משולש לפי 3 קודקודים

$$\boldsymbol{S}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}-\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}})\boldsymbol{y}_{\mathbf{3}}+(\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}-\boldsymbol{x}_{\mathbf{3}})\boldsymbol{y}_{\mathbf{1}}+(\boldsymbol{x}_{\mathbf{3}}-\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}})\boldsymbol{y}_{\mathbf{2}}]$$

הרחבות

עוצמה מתמטית, פדגוגית וחינוכית של המשימה: המשימה היא בעיה מתמטית הניתנת לפתרון במספר רב של דרכים ולכן היא עוצמתית. כאשר תלמיד פותר בעיה בדרכים שונות הדבר מפתח גמישות מחשבתית, שטף וקישוריות בין תחומים שונים של המתמטיקה. בפתרונות השונים יש שימוש במספר רב של מושגים מתמטיים כגון: חישוב אורך קטע, חישוב שיפוע של ישר, מציאת משוואת ישר, מציאת משוואת ישר מאונך, חישוב מרחק נקודה מישר, משפט קוסינוסים, חישוב שטח משולש במספר דרכים, זווית בין ישרים בהצגה ווקטורית, מספרים מרוכבים בהצגה פולרית, חישוב של שטח משולש בגיאומטריה, שימוש בנוסחת הירון לחישוב שטח משולש. יש שימוש במושגים מתמטיים רבים ולכן הצפיפות המושגית של הבעיה גדולה.

מומחיות של מורים למתמטיקה וסוגי ידע מתמטי להוראה הקשורות לבעיה:

ננתח את סוגי ידע המורים כפי שבאים לידי ביטוי בדרכי הפתרון השונים המוצעים לפי Ball (2008, Ball et al.). בכל פתרון אפשרי בא לידי ביטוי ידע תוכן משותף (CCK). כיון שזו בעייה שפתרונה פשוט בכל דרך שנבחר לפתור,והיא אינה דורשת תחכום או מניפולציות אלגבריות מסובכות, המורה ידע להבחין בתשובות שגויות.

הצעותינו לפתרונות השונים נוגעות בתחומים שונים של המתמטיקה מתוך תוכנית הלימודים כגון: הנדסה אנליטית, גיאומטריה, מספרים מרוכבים, וקטורים וטריגונומטריה. בכך בא לידי ביטוי ידע של התוכן ושל תוכנית הלימודים של המורה.

הבעיה מדגימה את הקשר בין משפט הקוסינוסים למכפלה סקלרית, ואת הקשר בין מספרים מרוכבים לטריגונומטריה. בכך בא לידי ביטוי ידע תוכן ייחודי של המורה (SCK). התלמיד יכול ליצור קשר בין תחומים שונים של המתמטיקה, דבר אשר מגביר את ההבנה של המתמטיקה.

שילוב טכנולוגיה אפשרי: ניתן לשלב פעילות בגאוגברה בפתרונות השונים. צרפנו מספר קבצים מתאימים.

ידע מתמטי מתקדם הקשור לפתרונות של הבעיה: שתי ההצעות האחרונות לפתרון, חישוב השטח באמצעות נוסחת הירון וכן חישוב שטח משולש לפי שלושת קודקודיו, לא נמצאים בתוכנית הלימודים ל 5 יח"ל. כאשר מורה משתמש בדרכים האלה לפתרון הוא הופך את הידע הפריפריאלי שלו לפי Foster (Foster, 2011), לידע של התלמידים ובזאת מעשיר אותם.

מקורות

- *Foster, C. (2011) Communications Peripheral mathematical Knowledge : For the Learning of Mathematics 31(3), 24-29*
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education* 59(5),389-407.